Révisions : Fonctions

I Dérivée et variations

1.1 Dérivabilité

Avant de dériver une fonction, il faut justifier sa dérivabilité. Sauf cas compliqués vus ultérieurement, on utilise le résultat suivant :

Proposition 1

Soient D_1 et D_2 des parties de $\mathbb{R}$.

- Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_1 \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur D_1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  Les fonctions $\lambda f + \mu g$ (combinaison linéaire de f et g) et fg (produit de f et g) sont dérivables sur D_1.
  Si, de plus, g ne s'annule pas sur D_1, la fonction $\dfrac{f}{g}$ (quotient de f et g) est dérivable sur D_1.
- Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur D_1 et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur D_2 telles que pour tout $x \in D_1,\ f(x) \in D_2$.
  La fonction $g \circ f$ est dérivable sur D_1.

Remarque : En pratique, on ne donne pas explicitement les fonctions f et g auxquelles on applique cette proposition. On se contente de dire, "par combinaison linéaire de fonctions dérivables, la fonction ... est dérivable sur ..." ou "par opérations sur les fonctions dérivables, la fonction ... est dérivable sur ..." ou "par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction ... est dérivable sur ..." ou ...

1.2 Calcul de la dérivée

Pour calculer une dérivée, on utilise les résultats d'opérations sur les dérivées ainsi que les formules de dérivées usuelles :

Proposition 2

Soient D_1 et D_2 des parties de $\mathbb{R}$.

- Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_1 \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur D_1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \text{ et } (fg)' = f'g + fg'.$$

  Si, de plus, g ne s'annule pas sur D_1, on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

- Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur D_1 et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur D_2 telles que pour tout $x \in D_1,\ f(x) \in D_2$. On a :

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f.$$

Formule 1

Fonction $f : x \mapsto$	Dérivée $f' : x \mapsto$	Ensemble de validité
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}^-$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\exp x$	$\exp x$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

En utilisant ces formules ainsi que la formule de dérivation d'une composée, on obtient :

Formule 2

Fonction	Dérivée	u dérivable à valeurs dans :
$u^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$nu'.u^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$u^n,\ n \in \mathbb{Z}^-$	$nu'u^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\exp \circ u$	$u'.\exp \circ u$	$\mathbb{R}$
$\ln \circ u$	$\frac{u'}{u}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\cos \circ u$	$-u'.\sin \circ u$	$\mathbb{R}$
$\sin \circ u$	$u'.\cos \circ u$	$\mathbb{R}$

Remarque :

- En pratique, on n'écrit pas explicitement les fonctions auxquelles on applique ces formules, on fait le calcul directement sur la copie puis on simplifie.
- On fera attention à ne pas confondre f' (fonction dérivée) et $f'(x)$ nombre dérivé. On ne peut pas écrire $f'(x)$ avant d'avoir défini x.

➪ **Exemple 1 :** Calculer la dérivée de :

1. $f_1 : x \mapsto (x^4 - 3x^2 + 2)\sqrt{x^2+4}$:
On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 4 > 0$, donc, par opérations sur les fonctions dérivables f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1'(x) = (4x^3 - 6x)\sqrt{x^2+4} + (x^4 - 3x^2 + 2)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{(4x^3-6x)(x^2+4) + x(x^4-3x^2+2)}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x(5x^4+7x^2-22)}{\sqrt{x^2+4}}.$$

2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^x + 1}{\ln(\sqrt{x}+1)}$:
$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\sqrt{x}+1 > 0$ donc, par opérations sur les fonctions dérivables, f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,
$$f_2'(x) = \frac{\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - e^x\right)\ln(\sqrt{x}+1) - \left(e^{\frac{1}{x}} - e^x + 1\right)\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}}{\ln^2(\sqrt{x}+1)}.$$

3. $f_3 : x \mapsto x^3.\cos(x) + \sin^2(e^x)$:
Par opérations sur les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$f_3'(x) = 3x^3.\cos(x) - x^3\sin(x) + 2e^x\cos(e^x)\sin(e^x).$$

Remarque :

- Il ne faut pas oublier le "soit $x \in \ldots$", avant d'écrire $f'(x) = \ldots$.
- L'objectif est de réussir à calculer ces dérivées sans étapes intermédiaires de calcul. Si vous avez besoin d'en rajouter au début, vous pouvez le faire au brouillon mais cela doit être provisoire.

➪ **Exemple 2 :** (**A traiter**)
Calculer la dérivée de :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{e^{3x+4}}{e^{3x}+4}$ .... $f_1' : x \mapsto \dfrac{12e^{3x+4}}{(e^{3x}+4)^2}$
2. $f_2 : x \mapsto e^{\cos x}\sqrt{\ln(x^4+1)}$ .... $f_2' : x \mapsto e^{\cos x}\left(-\sin(x)\sqrt{\ln(x^4+1)} + \dfrac{4x^3}{2(x^4+1)\sqrt{\ln(x^4+1)}}\right)$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\cos(x)\cos(e^x)}{\sqrt{e^{3x}+4}}$ .... $f_3' : x \mapsto \dfrac{2\Big(-\sin(x)\cos(e^x) - \cos(x)e^x\sin(e^x)\Big)\left(e^{3x}+4\right) - 3\cos(x)\cos(e^x)e^{3x}}{2(e^{3x}+4)^{3/2}}$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{\ln^2(x)}{\sqrt{x^4+3x^2+2}}$ .... $f_4' : x \mapsto \dfrac{2\ln(x)(x^4+3x^2+2) - x\ln^2(x)(2x^3+3x^2)}{x(x^4+3x^2+2)^{3/2}}$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{\ln(x)\ln(x+1)}{\ln(x+2)}$ .... $f_5' : x \mapsto \dfrac{(x+1)(x+2)\ln(x+1)\ln(x+2) + x(x+2)\ln(x)\ln(x+2) - x(x+1)\ln(x)\ln(x+1)}{x(x+1)(x+2)\ln^2(x+2)}$

1.3 Variations d'une fonction dérivable

Pour tracer le tableau de variations d'une fonction, on utilise le résultat suivant :

Proposition 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' \geq 0$ sur I alors f est croissante sur I.
- Si $f' \leq 0$ sur I alors f est décroissante sur I.
- Si $f' > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' < 0$ sur I alors f est strictement décroissante sur I.
- Si $f' \geq 0$ sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' \leq 0$ sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque :

- Dans un tableau de variations, les flèches représentent toujours la monotonie stricte.
- Ces résultats ne sont vrais que sur un intervalle. Par exemple, la fonction inverse $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $f' < 0$ mais elle n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car $f(-1) < f(1)$ et $-1 < 1$.

➪ **Exemple 3 :** Etudier la fonction :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2(x-1)^3. \end{array}$$

Par opérations sur les fonctions f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 2x(x-1)^3 + 3x^2(x-1)^2 = x(x-1)^2(2(x-1)+3x) = x(x-1)^2(5x-2).$$

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{5}$		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$5x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{108}{5^5}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque :

- Les limites qui ne sont pas des formes indéterminées n'ont pas à être justifiées.
- Le tableau de variations montre que f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[\frac{2}{5}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0, \frac{2}{5}]$.
- Les bornes des intervalles donnés au point précédent peuvent bien être fermées car il s'agit un point (donc d'un nombre fini) d'annulation de la dérivée.
- Il est faux de dire que f est strictement croissante sur $]-\infty, 0] \cup [\frac{2}{5}, +\infty[$. En effet, $f(0) \geq f(\frac{2}{5})$ et $0 < \frac{2}{5}$.

➪ **Exemple 4 : (A traiter)**
Etudier les variations de :

1. $$\begin{array}{rccl} f_1 : & \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{e^x - 1}{x} - \ln x. \end{array}$$

   ....

   f_1 est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, 1]$.

2. $$\begin{array}{rccl} f_2 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (e^x - 1)^3(e^x + 1). \end{array}$$

   ....

   f_2 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

II Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

2.1 Continuité

Définition 1

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$.
On dit que f est continue en a si et seulement si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

On dit que f est continue sur D si et seulement si f est continue en tout point de D.

Remarque :

- La continuité est avant tout est une notion locale : on étudie le comportement de la fonction au voisinage d'un point.
- L'interprétation de la continuité disant que "la courbe est obtenue sans lever le crayon" n'est vraie que sur les intervalles (parties de $\mathbb{R}$ "en un seul morceau"). Ainsi, la fonction inverse $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ même si on doit "lever le crayon" en 0. Le point 0 pose un problème de définition mais pas un problème de continuité.

En pratique, on justifie la continuité d'une fonction par des opérations sur des fonctions continues. Il est vraie qu'une fonction dérivable et continue mais il est inutile d'utiliser cet argument dans les cas pratiques.

Proposition 4

Soient D_1 et D_2 des parties de $\mathbb{R}$.

- Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_1 \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur D_1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  Les fonctions $\lambda f + \mu g$ (combinaison linéaire de f et g) et fg (produit de f et g) sont continues sur D_1.
  Si, de plus, g ne s'annule pas sur D_1, la fonction $\dfrac{f}{g}$ (quotient de f et g) est continue sur D_1.
- Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur D_1 et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur D_2 telles que pour tout $x \in D_1$, $f(x) \in D_2$.
  La fonction $g \circ f$ est continue sur D_1.

Formule 3

Fonction $f : x \mapsto$	Ensemble de continuité
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}^-$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$
$\exp x$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$

2.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit I un intervalle. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in I$ tels que $a < b$.
Soit $y \in [f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$, alors :

$$\text{il existe } c \in [a,b] \text{ tel que } f(c) = y.$$

Remarque : Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'existence et pas d'unicité.

Proposition 5 : Généralisations du théorème des valeurs intermédiaires

- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en a et en b.
  Soit $y \in]\lim_{x \to a} f(x), \lim_{x \to b} f(x)[$ ou $]\lim_{x \to b} f(x), \lim_{x \to a} f(x)[$, alors :
  $$\text{il existe } c \in]a,b[, \quad f(c) = y.$$
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en a.
  Soit $y \in]\lim_{x \to a} f(x), f(b)]$ ou $[f(b), \lim_{x \to a} f(x)[$, alors :
  $$\text{il existe } c \in]a,b], \quad f(c) = y.$$
- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en b.
  Soit $y \in]\lim_{x \to b} f(x), f(a)]$ ou $[f(a), \lim_{x \to b} f(x)[$, alors :
  $$\text{il existe } c \in [a,b[, \quad f(c) = y.$$

Corollaire 1 : Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I, soient $a, b \in I$ tels que $a < b$.
Soit $y \in [f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$, alors :

il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Remarque :

- Ce résultat peut aussi être appelé corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
- L'hypothèse de monotonie stricte permet d'obtenir l'unicité.
- Le théorème de la bijection se généralise de la même façon que dans la proposition précédente.

➪ **Exemple 5 :** Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$e^{2c}.\sqrt{c^2+9} = 5.$$

- *Posons :* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{2x}.\sqrt{x^2+9}. \end{array}$.
- *Comme* exp *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $\sqrt{.}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$*, par opérations sur les fonctions continues,* f *est continue sur l'intervalle* $\mathbb{R}^+$.
- *On a :* $f(0) = 3$ *et* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$*, donc* $5 \in [f(0), \lim_{x \to +\infty} f(x)[$.
- *Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe* $c \in \mathbb{R}^+$ *tel que* $f(c) = 5$*, c'est-à-dire :*

$$e^{2c}.\sqrt{c^2+9} = 5.$$

Remarque : Dans cet exemple, on n'a utilisé aucun argument de dérivabilité.

➪ **Exemple 6 :** Montrer qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ tel que :

$$\frac{1}{(c-1)^3} + \frac{1}{(c-2)^5} = 0.$$

Remarque :

- Contrairement à l'exemple précédent, on demande l'unicité de la solution, il faudra donc utiliser un argument de stricte monotonie. On prouvera la stricte monotonie par des arguments sur la dérivée mais ces arguments ne servent pas à prouver la continuité.
- $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ n'est pas un intervalle, on ne peut donc pas appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur cet ensemble. Il s'agit par contre de la réunion de trois intervalles : $]-\infty, 1[$, $]1, 2[$ et $]2, +\infty[$.

- *Posons :* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1,2\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-2)^5}. \end{array}$.
- *Par opérations sur les fonctions dérivables,* f *est dérivable sur* $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ *et, soit* $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ *:*

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^4} - \frac{5}{(x-2)^6} < 0.$$

  Ainsi f *est strictement décroissante sur* $]-\infty, 1[$*, sur* $]1, 2[$ *et sur* $]2, +\infty[$.
- *On a :* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ *et* f *est strictement décroissante sur* $]-\infty, 1[$ *donc :*

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \ f(x) < 0.$$

  Ainsi l'équation $f(x) = 0$ *n'a pas de solution sur* $]-\infty, 1[$.
- *On a :* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ *et* f *est strictement décroissante sur* $]2, +\infty[$ *donc :*

$$\forall x \in]2, +\infty[, \ f(x) < 0.$$

  Ainsi l'équation $f(x) = 0$ *n'a pas de solution sur* $]2, +\infty[$.
- *Par opérations sur les fonctions continues,* f *est continue sur l'intervalle* $]1, 2[$ *et* f *est strictement décroissante sur* $]1, 2[$.
  De plus, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ *donc* $0 \in]\lim_{x \to 2^-} f(x), \lim_{x \to 1^+} f(x)[$.
  Ainsi d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $c \in]1, 2[$ *tel que* $f(c) = 0$.
  Donc l'équation $f(x) = 0$ *a une unique solution sur* $]1, 2[$.
- *Ainsi, l'équation* $f(x) = 0$ *a une unique solution sur* $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$*, c'est-à-dire il existe un unique* $c \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ *tel que :*

$$\frac{1}{(c-1)^3} + \frac{1}{(c-2)^5} = 0.$$

Remarque :

- On a $f' < 0$ mais on ne peut pas affirmer que f soit strictement décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ mais seulement sur les intervalles qui composent cet ensemble. On peut tracer le tableau de variations de f pour s'en convaincre.
- La non-existence de solution sur un intervalle ne nécessite pas d'argument de continuité car on n'utilise pas le théorème des valeurs intermédiaires mais seulement un argument de monotonie.