Introduction aux nombres complexes

I Forme algébrique

1.1 Définition

Définition-Proposition 1

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$:
- possédant un élément noté i tel que $i^2 = -1$,
- dont tout élément s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$ avec x et y réels,
- muni d'une addition notée + telle que : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, on définit $z + z'$:

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

- muni d'une multiplication notée $\times$ ou . telle que : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, on définit $z \times z'$ par :

$$z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Remarque : Il faut uniquement retenir que $i^2 = -1$, les autres opérations ont des règles identiques à celles dans $\mathbb{R}$.

➪ **Exemple 1 :** Posons $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$ et $z_3 = 4 - i$, on a :

$$(z_1 + z_2)z_3 = (3 + 4i)(4 - i) = 12 - 3i + 16i + 4 = 16 + 13i.$$

➪ **Exemple 2 :** Posons $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2i$ et $z_3 = 3 - i$.

$$z_1 z_2 z_3 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 8 + 4i.$$

Définition 1

On appelle nombre imaginaire pur, tout nombre complexe de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$.
On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

1.2 Partie réelle et partie imaginaire

Définition 2

Soit $z \in \mathbb{C}$, il existe une unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$. Cette écriture est appelée **écriture algébrique** ou **forme algébrique**.
De plus x est appelé **partie réelle** de z et notée $\mathrm{Re}\,(z)$, y est appelée **partie imaginaire** de z et notée $\mathrm{Im}\,(z)$.

Remarque : La partie réelle est réelle mais la partie imaginaire est aussi réelle.

➪ **Exemple 3 :** Posons $z_1 = -1 + 3i$ et $z_2 = 4 - i$. On cherche la partie réelle et la partie imaginaire de $z_1^2 - 2z_2$.
On a : $z_1^2 = (-1 + 3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i$.
Donc : $z_1^2 - 2z_2 = (-8 - 6i) - 2(4 - i) = -16 - 4i$. D'où :

$$\mathrm{Re}\,(z_1^2 - 2z_2) = -16 \text{ et } \mathrm{Im}\,(z_1^2 - 2z_2) = -4.$$

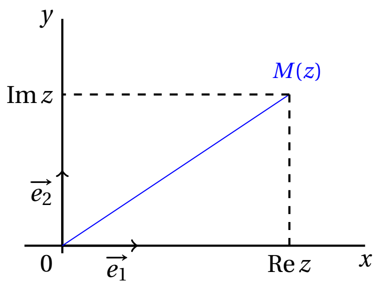
➪ **Exemple 4 :** Posons $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - i$ et $z_3 = -i$.
On a : $z_1^2 z_2 z_3 =$
Donc :

$$\mathrm{Re}\,(z_1^2 z_2 z_3) = 15 \text{ et } \mathrm{Im}\,(z_1^2 z_2 z_3) = 5.$$

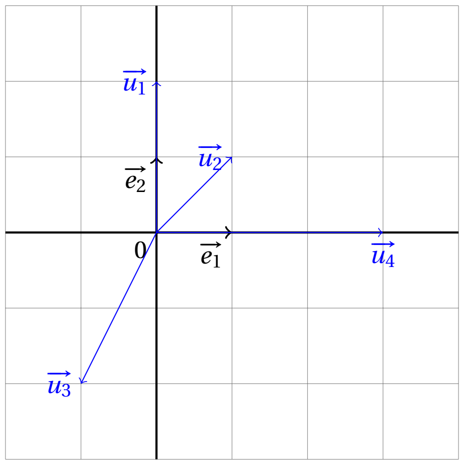
1.3 Interprétation géométrique

Définition 3

On munit le plan usuel $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
A tout point M de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) (resp. à tout vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$) avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$ et réciproquement. On dit que z est l'**affixe** de M (resp. $\overrightarrow{u}$) et M (resp. $\overrightarrow{u}$) est appelé image de z. On note $M(z)$ (resp. $(\overrightarrow{u}(z))$ pour exprimer que z est l'affixe de M (resp. $\overrightarrow{u}$).



➪ **Exemple 5 :** On pose $z_1 = 2i$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = -1-2i$ et $z_4 = 3$. Soit $\overrightarrow{u_1}$ (resp. $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{u_4}$) le vecteur d'affixe z_1 (resp. z_2, z_3, z_4). On a :



Remarque : L'axe des abscisses correspond aux nombres réels et l'axe des ordonnées aux nombres imaginaires purs.

1.4 Conjugaison

Définition 4

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de z, et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Proposition 1

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z}^n = \overline{z^n}$.
- si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

➪ **Exemple 6 :** Posons $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2+3i$ et $z_3 = 4+i$, on calcule le conjugué de $z_1^2 - 3z_2 + iz_3$:

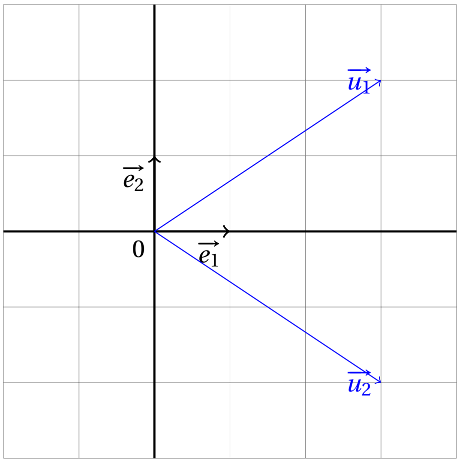
$$\overline{z_1^2 - 3z_2 + iz_3} = \overline{z_1}^2 - 3\overline{z_2} + \overline{i}\,\overline{z_3} = (1-i)^2 - 3(2-3i) - i(4-i) = (1-2i-1) - 6 + 9i - 4i - 1 = -7 + 3i.$$

➪ **Exemple 7 :** Posons $z_1 = 1-i$, $z_2 = 3+i$ et $z_3 = -i$, on calcule le conjugué de $z_1(z_2^2 + z_3)$:

$$\overline{z_1(z_2^2 + z_3)} = \qquad\qquad\qquad\qquad = 13 + 3i.$$

Remarque : Comme le point de coordonnées $(x, -y)$ est le symétrique du point de coordonnées (x, y) par rapport à l'axe des abscisses, la conjugaison s'interprète comme la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

➪ **Exemple 8 :** On pose $z = 3+2i$, on a $\overline{z} = 3-2i$. Soit $\overrightarrow{u_1}$ (resp. $\overrightarrow{u_2}$) le vecteur d'affixe z (resp. $\overline{z}$). On a :



II Forme trigonométrique

2.1 Module

Définition 5

On appelle module du nombre complexe $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et on note $|z|$ le réel positif (ou nul) défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque : La notation du module est la même que celle de la valeur absolue car la notion de module prolonge celle de valeur absolue, c'est à dire que le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue. En effet, si $x \in \mathbb{R}$, alors $x = x + i0$ et le module de x vaut $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2}$ qui est égal à la valeur absolue de x.

Interprétation géométrique du module :
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Si M est le point du plan $\mathcal{P}$ d'affixe z alors $|z| = ||\overrightarrow{OM}|| = OM$.
De même, si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur du plan d'affixe z alors $|z| = ||\overrightarrow{u}||$
Si A et B sont deux points du plan d'affixes a et b alors $|b - a| = ||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

Cercles et disques :
Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- L'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant $|z - \omega| = r$ est le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon r.
- L'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant $|z - \omega| < r$ (resp. $|z - \omega| \leq r$) est le disque ouvert (resp. fermé) de centre Ω d'affixe ω et de rayon r.
  Le disque ouvert ne contient pas les points du cercle contrairement au disque fermé.

Proposition 2

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

- $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z|^n = |z^n|$
- si $z_2 \neq 0$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Remarque : On peut calculer le module d'un produit mais il n'y a pas de formule pour le module d'une somme.

➪ **Exemple 9 :** Posons $z_1 = \sqrt{3} + i$. On calcule le module de z_1^3 :

$$|z_1^3| = |z_1|^3 = \sqrt{3+1}^3 = 2^3 = 8.$$

➪ **Exemple 10 :** Posons $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$. On calcule le module de $\dfrac{z_1^2}{z_2}$:

$$\left|\frac{z_1^2}{z_2}\right| = \qquad = \sqrt{2}.$$

Proposition 3

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z|^2 = z\overline{z}$ et $|z| = |\overline{z}|$.

Méthode 1 : Calcul de la forme algébrique d'un quotient

On cherche à déterminer la forme algébrique du quotient $\frac{z_1}{z_2}$, avec $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}^*$.
On multiple et on divise la fraction par la quantité conjugué du dénominateur :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Comme $|z_2|^2$ est réel, il suffit de développer le numérateur pour obtenir la forme algébrique.

➪ **Exemple 11 :** Posons $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 2+3i$, on cherche la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{2+3i} = \frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i+2i+3}{2^2+3^2} = \frac{5-i}{13}.$$

➪ **Exemple 12 :** Posons $z_1 = -1+2i$ et $z_2 = 1-3i$, on cherche la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{-7-i}{10}.$$

2.2 Nombres complexes de module 1

Proposition 4

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Remarque : Comme $|z| = 1$, z est l'affixe d'un point du cercle trigonométrique dont les coordonnées sont de la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$ ainsi : $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

Définition 6

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ et on appelle exponentielle de $i\theta$, le nombre complexe défini par :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Remarque : La proposition précédente se réécrit donc : soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z = e^{i\theta}.$$

2.3 Propriétés de l'exponentielle d'un imaginaire pur

Proposition 5

L'application $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est 2π-périodique, c'est-à-dire :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i\theta}.$$

Proposition 6

Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

Remarque : Ce résultat est analogue à celui vu pour l'exponentielle de nombres réels.

Corollaire 1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

2.4 Forme trigonométrique

Proposition 7

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a : $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Définition 7

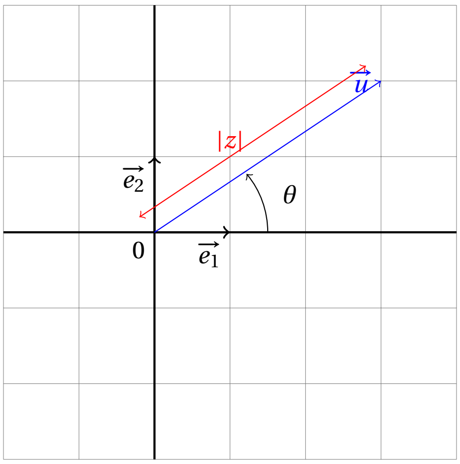
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$.
L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée **forme trigonométrique** ou **forme exponentielle**.
On dit que le réel θ est un argument de z.

Remarque : Si θ est un argument de z, alors $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sont des arguments de z. Ainsi, tout nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments. On va choisir d'en privilégier un avec la définition suivante.

Définition 8

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle argument principal de z et on note $\mathrm{Arg}(z)$ l'unique argument de z appartenant à $]-\pi,\pi]$.

Interprétation géométrique de l'argument :
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et θ un argument de z.
Si M a pour affixe z, alors, θ représente une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})$.
Si $\overrightarrow{u}$ a pour affixe z, alors, θ représente une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u})$.



Méthode 2

Pour déterminer la forme trigonométrique ou l'argument principal de $z \in \mathbb{C}^*$:

1. on calcule $|z|$,
2. on factorise z par $|z|$,
3. on cherche à reconnaître des valeurs connues de cos et sin.

➪ **Exemple 13 :**

- Pour $1+i$:
  On a $|1+i| = \sqrt{2}$, ainsi :

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

  Donc la forme trigonométrique de $1+i$ est $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et :

$$\mathrm{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}.$$

- Pour $1-i$:
  Comme, $1-i=\overline{1+i}$, la forme trigonométrique de $1-i$ est $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et :
$$\mathrm{Arg}\,(1+i)=-\frac{\pi}{4}.$$

➪ **Exemple 14 :**

- Pour $\sqrt{3}+i$:

  Donc la forme trigonométrique de $\sqrt{3}+i$ est $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et :
$$\mathrm{Arg}\,(1+i)=\frac{\pi}{6}.$$

- Pour $-1-i\sqrt{3}$:

  Donc la forme trigonométrique de $-1-i\sqrt{3}$ est $2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et :
$$\mathrm{Arg}\,(-1-i\sqrt{3})=-\frac{2\pi}{3}.$$

III Équations du second degré

Proposition 21 : Résolution de l'équation du second degré à coefficients réels

Soit $az^2+bz+c=0$ une équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ à coefficients $a,b,c\in\mathbb{R}$ avec $a\neq 0$.
On appelle discriminant de l'équation, le nombre réel $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta=0$, l'équation admet une unique solution $z_0=-\dfrac{b}{2a}$, appelée racine double et
$$\forall z\in\mathbb{C},\ az^2+bz+c=a(z-z_0)^2.$$
- Si $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes, $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et
$$\forall z\in\mathbb{C},\ az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2).$$
- Si $\Delta<0$, l'équation admet deux solutions non réelles distinctes, $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et
$$\forall z\in\mathbb{C},\ az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2).$$

Remarque :

- Dans le cas $\Delta<0$, l'équation admet deux solutions qui sont conjuguées.
- Quand $\Delta<0$, on ne peut pas écrire $\sqrt{\Delta}$. Mais, on a : $(i\sqrt{-\Delta})^2=i^2.(-\Delta)=(-1).(-\Delta)=\Delta$. Ainsi, $i\sqrt{-\Delta}$ est une racine carrée de Δ.

➪ **Exemple 15 :** On veut résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \qquad (E)$$

On donnera les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
Le discriminant associé à (E) est :

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4.4 = 12 - 16 = -4.$$

Les solutions de (E) sont donc :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2} \text{ et } z_2 = \frac{2\sqrt{3}-2i}{2}.$$

La forme algébrique des solutions est donc :

$$z_1 = \sqrt{3} + i \text{ et } z_2 = \sqrt{3} - i.$$

De plus : $\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2e^{i\pi/6}$. Donc la forme trigonométrique des solutions est :

$$z_1 = 2e^{i\pi/6} \text{ et } z_2 = 2e^{-i\pi/6}.$$

➪ **Exemple 16 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + 4z + 5 = 0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

La forme algébrique des solutions est donc :

$$z_1 = -2 + i \text{ et } z_2 = -2 - i.$$

➪ **Exemple 17 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

La forme algébrique des solutions est donc :

$$z_1 = -1 + i \text{ et } z_2 = -1 - i.$$

La forme trigonométrique des solutions est donc :

$$z_1 = \sqrt{2}e^{3i\pi/4} \text{ et } z_2 = \sqrt{2}e^{-3i\pi/4}.$$