Indications
DM 12

Problème 1 :

1. X_1 est à valeurs dans $\{0,1\}$, on reconnaît donc une loi usuelle.
2. Sachant $(X_1 = 1)$, déterminer la composition de l'urne au moment du deuxième tirage.
3. Remarquer que X_n est pris en compte dans S_n.
4. Sachant $(S_n = k)$, déterminer la composition de l'urne au moment du $(n+1)-$ème tirage.
5. Utiliser le système complet d'événements $(S_n = k)_{k\in[\![b,b+n]\!]}$.
6. Raisonner par récurrence forte.
7.
8. Utiliser la formule des probabilités composées et un produit télescopique.
9. Sachant $(S_n = k)$, déterminer la composition de l'urne au moment du $(n+1)-$ème tirage.
10. Utiliser la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(S_n = l)_{l\in[\![1,n+1]\!]}$.
11. Raisonner par récurrence et appliquer, en fonction des cas, la question 8. et la question 10.

Problème 2 :

1. Reconnaître une somme de Riemann.
2. Remarquer que $P(X \geq i) = \sum_{k=i}^{N} P(X = k)$ et intervertir les sommes.
3. Calculs classiques.
   (a) Remarquer que $(U_k \geq i) = \bigcap_{j=1}^{k} (X_j \geq i)$.
   (b) Utiliser 2. et 4.(a).
   Pour l'équivalent, remarquer que $\frac{1}{n^{k+1}} S_k(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k+1}$.
4. (a) Remarquer que Y_i est une fonction de X_i et calculer $P(Y_i = j)$.
   (b) Remarquer que $\max(Y_1,\ldots,Y_k) = N+1-\min(X_1,\ldots,X_k)$.
5. (a) Raisonner comme à la question 2.
   (b) Utiliser 4.(a) et 6.(a).
   (c)
   (d) Calculer $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N^2} V(U_k)$ en utilisant 1.