Indications :
vacances de Noël

Problème 1 : Autour du théorème de Césaro

1. (a) Raisonner par récurrence.
   (b) Etudier le signe de $x_{n+1} - x_n$.
   (c) Utiliser le théorème de la limite monotone pour prouver la convergence et un passage à la limite dans la définition de la suite pour calculer la limite.
   (d) Faire le calcul.
   (e) Utiliser $\lim x_n = 0$.
   (f) Utiliser une somme télescopique puis le théorème de Césaro pour en déduire $\lim v_n = 1$. Exprimer ensuite nx_{n+1} en fonction de v_n.
2. (a) Il s'agit d'une opération sur des suites convergentes.
   (b) i. Utiliser le théorème de Césaro.
   ii. Remarquer que $x_n = \frac{x_n}{n}.n$.
   iii. Chercher un contre exemple.
3. (a) Utiliser une somme géométrique.
   (b) On montre que la réciproque est fausse.
4. (a) Remarquer que, si $k \geq n+1$, alors $u_k \geq u_{n+1}$.
   (b) Ecrire $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k$ en fonction de v_n et v_{2n}.
   (c) Montrer que (u_n) est majorée et utiliser le théorème de Césaro.
   (d) Etudier la réciproque du théorème de Césaro.

Problème 2 : Matrices magiques

1. Raisonner par équivalences en utilisant la définition du produit matriciel.
2. (a) Calculer les sommes des coefficients.
   (b) Utiliser la définition du produit matriciel et sommer les coefficients.
3. Pour la puissance, raisonner par récurrence.
4. Expliciter EM et ME.
5. (a)
   - Pour l'inversibilité de M, chercher une matrice dont le produit avec M donne I_3.
   - Pour l'absurdité, montrer que $E = 0$.
   - Pour les puissances, montrer par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $M^{2p+1} = \lambda^p M$.

   (b) Utiliser la formule du binôme de Newton et montrer par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_0^k E = \sigma(M_0)^k E$. Remarquer que $\operatorname{tr}(M_0) = 0$ pour avoir M_0^p magique pour p impair.
6. (a) Faire le calcul du produit.
   (b) Raisonner par récurrence.
   (c) Raisonner par l'absurde en montrant que I_4 est magique.

Problème 3 : Une relation de récurrence non linéaire

1. Raisonner par double implication.
2. Faire un passage à la limite.
3. Etudier $u_{n+1} - u_n$.
4. (a) Raisonner par récurrence.
   (b) Etudier $u_{n+1} - u_n$.
   (c) Utiliser le théorème de la limite monotone.
5. Poser : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $v_k = \frac{\ln u_k}{2^k}$ et calculer $\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$ pour en déduire v_n puis u_n.
6. (a) i.
      ii. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{(\sqrt{2})^n}$.
      iii. Découper S_n et utiliser la question précédente pour chercher une majoration dépendant uniquement de N.
   (b) Utiliser les questions 2 et 4.c.
   (c) Utiliser l'expression de u_n obtenue à la question 5 pour exprimer u_n en fonction de S_{n-2}. Se ramener à l'étude de la convergence de suites géométriques.