Programme de révisions :
vacances de Noël

Consignes :

Les problèmes sont facultatifs. Vous pouvez ne pas les faire ou choisir de faire :

- un problème de révisions sur les suites,
- un problème de révisions sur les suites et un problème de calcul matriciel,
- un problème de révisions sur les suites, un problème de calcul matriciel et un problème plus technique sur les suites.

Séance 1 :

Déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. On pourra effectuer un changement de variable en $\sqrt[6]{x}$.

Solution : $x \mapsto 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1)$

- Relire le cours du chapitre 12, partie I : Ensemble de matrices.
- Vérifier que les points suivants sont acquis :
  - ☐ Savoir faire un calcul pratique de produit matriciel $\to$ exemple 3
  - ☐ Connaître la définition générale du produit matriciel $\to$ exemple 4
  - ☐ Savoir utiliser les symboles de Kronecker $\to$ écrire le terme (i, j) de la matrices $E_{r,s}$ (définition 7) et de la matrice I_n (définition 9)
- Refaire l'exercice 5.

Problèmes facultatifs :

- Problème 1 : question 1
- Problème 1 : question 1
- Problème 1 : questions 1 et 2

Séance 2 :

Déterminer le module et l'argument principal de : $z = \dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1-\sqrt{2}-i}$.

Solution : $|z| = \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{8}}$, $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

- Relire le cours du chapitre 12 partie II : Opérations élémentaires et partie III : Systèmes linéaires.
- ⚠Il est inutile de connaître les définitions des matrices d'opérations élémentaires. Il faut uniquement retenir que les opérations élémentaires sur les lignes (resp. les colonnes) se traduisent matriciellement par un produit à gauche (resp. à droite) par une matrice inversible.
- Vérifier que les points suivants sont acquis :
  - ☐ Savoir résoudre un système en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss → exemples 5 et 6
- Refaire l'exercice 8.

Problèmes facultatifs :

Problème 1 : question 2

Problème 1 : questions 2-3-4

Problème 1 : questions 3 et 4

Séance 3 :

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\},\ \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \begin{cases} \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right) & \text{si } x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\\ \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right) + \pi & \text{si } x \in]-1,0[\end{cases}$$

Solution : $f' = 0$ et $\lim_{\pm\infty} f = 0$, $\lim_{(-1)^+} f = \pi + \lim_{(-1)^-} f$

avec $f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$

- Relire le cours du chapitre 12 partie IV : Ensemble des matrices carrées.
- Vérifier que les points suivants sont acquis :
  - ☐ Savoir calculer une puissance lorsqu'on a l'intuition de la formule → exemple 7
  - ☐ Savoir calculer une puissance avec le binôme de Newton en utilisant des matrices nilpotentes → exemple 8
  - ☐ Savoir calculer une puissance avec le binôme de Newton en utilisant le binôme de Newton scalaire → exemple 9
- Refaire les exercices 12 et 14.

Problèmes facultatifs :

Problème 1 : question 3

Problème 2 : questions 1 et 2

Problème 2 : questions 1, 2 et 3

Séance 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$\sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$

Solution : $\dfrac{n(4n^2-3n+5)}{6}$

- Relire le cours du chapitre 12 partie V : Matrices inversibles.
- Vérifier que les points suivants sont acquis :
  - ☐ Savoir calculer l'inverse d'une matrice de "petite" taille → exemple 11
  - ☐ Savoir calculer une puissance en utilisant une relation faisant apparaître des inverses → exemple 12

Problèmes facultatifs :

Problème 1 : question 4

Problème 2 : questions 3 et 4

Problème 2 : questions 4, 5 et 6

Séance 5 :

Sans étudier son domaine de définition, calculer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{3-\sin x}{2\cos x + 3\tan x}.$$

Solution : $x \mapsto -\frac{1}{5}\ln(2-\sin x) + \frac{7}{10}\ln|\sin x + \frac{1}{2}|$

- Préparer les exercices 20-23-25 du chapitre 12.

Problèmes facultatifs :

Problème 2 : question 5

Problème 3 : questions 1,2,3 et 4

Séance 6 :

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}.$$

   En déduire :

$$l_1 = \lim \frac{n!}{n^n}.$$

2. Calculer :

$$l_2 = \lim \sqrt[n]{2 + (-1)^n}.$$

Solution : $l_1 = 0$ et $l_2 = 1$

– Relire tout le cours du chapitre 12.

Problèmes facultatifs :

Problème 2 : question 6

Problème 3 : questions 5 et 6

Problème 1 : Autour du théorème de Césaro

A toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

On admet le théorème de Césaro (exemple 5 du cours) : si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.

1. On considère la suite définie par :

$$x_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n}.$$

   (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $0 < x_n < 1$.
   (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
   (d) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n+1}.$$

   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}.$$

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.
   (f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer v_n en fonction de n, x_{n+1} et x_1. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} n x_n = 1.$$

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle.
   (a) On suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Montrer que la suite $(x_{n+1}-x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (b) On suppose que la suite $(x_{n+1}-x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre réel l.
      i. Montrer que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
      ii. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans le cas où $l \neq 0$.
      iii. Dans le cas où $l = 0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle nécessairement convergente ?
3. Dans cette question, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n.$$

   (a) Etudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Conclure quand à la validité de la réciproque de la proposition énoncée à la question 1.(b).
4. Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (a) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité :

$$n u_{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k.$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \leq 2v_{2n} - v_n$.
   (c) Etablir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser la limite.
   (d) Qu'a-t-on démontré ?

Problème 2 : Matrices magiques

Si n est un entier naturel, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
On note $m_{i,j}$ l'élément ligne i et colonne j d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note Id la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On appelle matrice semi-magique d'ordre n, une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un réel, noté $\sigma(M)$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M),$$

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M).$$

On appelle trace de M le réel $\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.
On note SM_n l'ensemble des matrices semi-magiques d'ordre n.
On appelle matrice magique d'ordre n, une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes : M est semi-magique et :

$$\sigma(M) = \mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} \text{ et } \sigma(M) = \sum_{i,j\in[\![1,n]\!],i+j=n+1} m_{i,j}.$$

On note MG_n l'ensemble des matrices magiques d'ordre n.
Si M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la transposée de M.
Un vecteur colonne X non nul sera dit vecteur propre de M associé à la valeur propre λ si et seulement si $MX = \lambda X$.

1. Montrer que M est semi-magique si et seulement si $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ (l'élément ligne i de V est 1) est vecteur propre commun de M et ${}^tM$, associé à la même valeur propre.
2. (a) Montrer que SM_n et MG_n sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
   (b) Montrer que si M et N sont des matrices semi-magiques d'ordre n alors MN est semi-magique.
3. On désigne par E la matrice à coefficients réels telle que :
$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!],\ e_{i,j} = 1.$$
   Montrer que E est magique. Montrer que :
$$\forall p \geq 1,\ E^p = n^{p-1}E.$$
4. Montrer que pour toute matrice semi-magique M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :
$$EM = \sigma(M)E = ME.$$
5. Dans cette question, on impose $n = 3$.
   On se propose de montrer que si M est magique de MG_3, alors pour tout entier p impair, M^p est magique.
   (a) Soit M une matrice magique de trace nulle.
   On admettra le résultat suivant qu'on ne demande pas de démontrer : il existe un polynôme P du troisième degré $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ tel que $P(M) = M^3 + aM^2 + bM + cId = 0$. Et de plus, le réel a est égal à $-tr(M)$.
   Montrer que l'hypothèse $c \neq 0$ entraîne que M est inversible et que la relation démontrée en 4. conduit à une contradiction.
   En déduire l'existence d'un réel λ tel que $M^3 = \lambda M$ et que pour tout entier p impair, M^p est magique.
   (b) Soit M une matrice magique de MG_3. On pose $M_0 = M - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(M)E$. Calculer M^p et montrer que pour tout entier impair M^p est magique.
6. Dans cette question, on impose $n = 4$ et on considère la matrice magique d'ordre 4 de MG_4,
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Vérifier que $A^2 = A + 2Id$.
   (b) Montrer qu'il existe deux entiers positifs a_p et b_p tels que :
$$A^p = a_p A + b_p Id.$$
   (c) Démontrer que pour tout $p \geq 2$, A^p ne peut pas être magique.

Problème 3 : Une relation de récurrence non linéaire

Soit a un réel positif ou nul. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $u_1 = a$ et définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer qu'il existe une unique valeur de a pour laquelle la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est constante. Déterminer cette valeur.
2. On suppose que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite finie l. Montrer que $l = 0$.
3. On suppose que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifie la propriété :

$$\forall n \geq 1,\ u_n \geq \sqrt{n}.$$

   Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante qui tend vers $+\infty$.
4. On suppose que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifie la propriété :

$$\text{il existe } k \in \mathbb{N}^*,\ u_k < \sqrt{k}.$$

   (a) Montrer que :

$$\forall n \geq k,\ u_n < \sqrt{n}.$$

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq k}$ est décroissante.
   (c) Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\geq 1}$?
5. Exprimer u_n en fonction de a et de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Dans cette question, on considère de plus la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \ln(k+1).$$

   (a) i. Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   ii. Montrer que :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N,\ \frac{\ln(n+1)}{(\sqrt{2})^n} \leq 1.$$

   iii. En déduire que $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente si et seulement si il existe un entier $k > 2$ tel que $u_k < 1$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente si et seulement si $a < \exp \frac{W}{2}$, où $W = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.