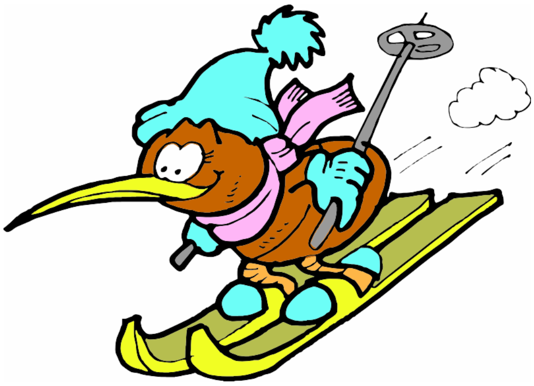
Indications :
vacances d'hiver



Problème facultatif : Révisions d'analyse

PARTIE I
Les fonctions continues vérifiant $f(x) = f(ax+b)$

1. *Étude du cas $|a| < 1$*
   (a) (x_n) est une suite arithmético-géométrique.
   (b)
   (c) Passage à la limite dans la relation $f(x_n) = f(x)$.
   (d) Analyse-synthèse.
2. *Étude du cas $|a| > 1$*
   (a) Double implication.
   (b) Se ramener à $\mathcal{E}(g_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}})$.

PARTIE II
Deux cas où les solutions de $f(x) = f(g(x))$ sont constantes

3. *Étude des points fixes de la fonction g lorsque $|g'| \leq K < 1$*
   (a) Appliquer l'inégalité des accroissements finis entre 0 et x.
   (b) Appliquer l'inégalité précédente dans les cas $x > 0$ et $x < 0$.
   (c) Théorème des valeurs intermédiaires.
4. *Étude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $|g'| \leq K < 1$*
   (a) Appliquer l'inégalité des accroissements finis entre x_n et L.
   (b) Passage à la limite dans la relation $f(x_n) = f(x)$.
   (c) Analyse-synthèse.
5. *Étude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $|g'| \geq K > 1$*
   (a) Valeurs intermédiaires pour le signe de g' et inégalité des accroissements finis pour les limites.
   (b) Résultat de dérivabilité d'une bijection réciproque.
   (c) Raisonner par équivalences puis se ramener à la question 4. appliquée à g^{-1}.

PARTIE III
Les fonctions continues vérifiant $f(x) = f(x^2)$ et $f(x) = f(\mathrm{e}^x)$

6. *Recherche des fonctions continues telles que $f(x) = f(x^2)$*
   (a) Calculer g'.
   (b) Récurrence.
   (c)
   (d) Analyse-synthèse en montrant d'abord que f est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
7. *Recherche des fonctions continues telles que $f(x) = f(e^x)$*
   (a)
   (b)
   (c) Utiliser l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$ et une somme télescopique.
   (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique fonction f définie sur $]-\infty, x_{n+1}]$, continue sur $]-\infty, x_n]$ qui coïncide avec φ sur $[0,1]$ et qui vérifie : $\forall x \in]-\infty, x_n]$, $f(x) = f(e^x)$.
   Pour cela on raisonnera par récurrence sur n et on fera une analyse-synthèse à chaque étape de la récurrence.