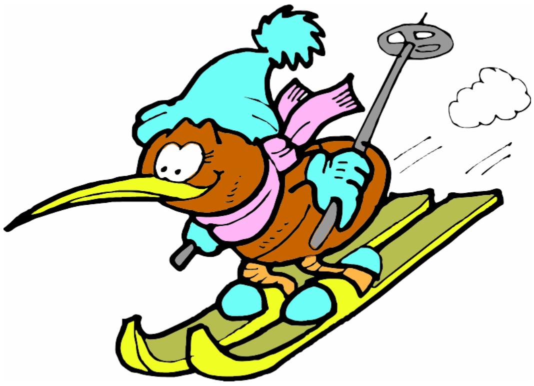
Programme de révisions :
vacances d'hiver



Séance 1 :

Calculer une primitive de :

$$x \mapsto \sqrt{x^2\sqrt{x}+x}.$$

Solution : changement de variable en $\sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{4}{9}\left(x^{3/2}+1\right)^{3/2}$

- ☐ Relire paragraphe I du chapitre 16 et bien revoir les équivalents usuels.
- ☐ Savoir calculer un équivalent.
  - ∗ exemple 1 du chapitre 16,
  - ∗ exercice 2 du chapitre 16.
- ☐ Savoir calculer une limite avec un équivalent.
  - ∗ exemple 2 du chapitre 16,
  - ∗ exercice 3 du chapitre 16.
- ☐ DM8 : questions 1 et 2 du problème 1.

Problème facultatif : questions 1 et 2.

Séance 2 :

Résoudre :

$$y'' - 4y' + 4y = 7\sin x - \cos x.$$

Solution : $x \mapsto \sin x + \cos x + (\lambda x + \mu)e^{2x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- ☐ Apprendre les DL "avec du $n!$" : e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ et écrire les DL en 0 de
  - e^x à l'ordre 5,
  - $\cos x$ à l'ordre 6,
  - $\sin x$ à l'ordre 5,
  - $\operatorname{ch} x$ à l'ordre 3,
  - $\operatorname{sh} x$ à l'ordre 4.
- ☐ Relire le chapitre 15.
- ☐ Refaire les exercices sur les polynômes classiques :
  - exercice 12 du chapitre 15 (polynômes de Tchebychev),
  - exercice 18 du chapitre 15 (polynômes de Legendre).
- ☐ DM8 : questions 3,4 et 5 du problème 1.

Problème facultatif : questions 3 et 4.

Séance 3 :

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(z^2 + 4z + 1)^2 + (3z + 5)^2 = 0.$$

Solution : $-3 - 2i, -1 - i, -3 + 2i, -1 + i$

- ☐ Apprendre les DL "avec du n" : $\ln(1 + x)$, $\ln(1 - x)$ et $\operatorname{Arctan} x$ et écrire les DL en 0 de
  - $\ln(1 + x)$ à l'ordre 3,
  - $\ln(1 - x)$ à l'ordre 2,
  - $\operatorname{Arctan} x$ à l'ordre 5,
  - e^x à l'ordre n,
  - $\sin x$ à l'ordre $2n + 2$.
- ☐ Relire la partie II du chapitre 16.
- ☐ Savoir faire une combinaison linéaire de DL :
  - exemple 4 du chapitre 16.
- ☐ Savoir faire un produit de DL :
  - exemple 5 du chapitre 16,
  - exemple 6 du chapitre 16.
- ☐ Préparer l'exercice 9 du chapitre 16.
- ☐ DM8 : question 1 a,b et c du problème 2.

Problème facultatif : question 5.

Séance 4 :

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- ☐ Apprendre les DL "sans rien" : $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$ et $\tan x$ et écrire les DL en 0 de
  - ∗ $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 3,
  - ∗ $\frac{1}{1+x}$ à l'ordre 5,
  - ∗ $\tan x$ à l'ordre 5,
  - ∗ $\cos x$ à l'ordre $2n+1$,
  - ∗ $\operatorname{Arctan} x$ à l'ordre $2n+1$,
  - ∗ $\ln(1-x)$ à l'ordre $2n$.
- ☐ Relire la partie II du chapitre 16.
- ☐ Savoir faire une composition de DL.
  - ∗ exemple 7 du chapitre 16.
- ☐ Savoir faire un quotient de DL.
  - ∗ exemple 8 du chapitre 16.
- ☐ Préparer l'exercice 10 du chapitre 15.
- ☐ DM8 : question 1 d et e du problème 2.

Problème facultatif : question 6.

Séance 5 :

Calculer la dérivée n-ième de :

$$f : x \mapsto (x^2 - x + 2)e^x.$$

Solution : $f^{(n)}(x) = (x^2 + (2n-1)x + (n^2 - 2n + 2))e^x$

- ☐ Apprendre le dernier DL : $(1+x)^\alpha$ et écrire les DL en 0 de
  - ∗ $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3,
  - ∗ $(1+x)^2$ à l'ordre 6,
  - ∗ $\frac{1}{(1+x)^2}$ à l'ordre 2,
  - ∗ $\frac{1}{1+x}$ à l'ordre n,
  - ∗ $\operatorname{sh} x$ à l'ordre $2n+2$,
  - ∗ $\tan x$ à l'ordre 4.
- ☐ Relire le chapitre 15.
- ☐ Savoir utiliser les racines d'un polynôme :
  - ∗ exercice 23 du chapitre 15,
  - ∗ exercice 28 du chapitre 15.
- ☐ DM8 : question 2 et 3 du problème 2.

Problème facultatif : question 7.

Séance 6 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme double :

$$S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j).$$

Solution : $\frac{n(n+1)^2}{2}$

- ☐ Test sur les formules de DL : écrire les DL en 0 de
  - $\frac{1}{1+x}$ à l'ordre 3,
  - $\cos x$ à l'ordre 5,
  - $\operatorname{sh} x$ à l'ordre 5,
  - $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}$ à l'ordre 2,
  - $(1+x)^3$ à l'ordre 42,
  - $\tan x$ à l'ordre 4,
  - $\ln(1-x)$ à l'ordre 4,
  - $\operatorname{Arctan} x$ à l'ordre 3.
- ☐ Relire III.1 du chapitre 16.
- ☐ Savoir primitiver un DL :
  - exemple 9 du chapitre 16,
  - exemple 10 du chapitre 16.
- ☐ Savoir calculer une limite en utilisant un DL :
  - exemple 11 du chapitre 16.
- ☐ Préparer les exercices 16 et 20 du chapitre 16.

Problème facultatif : Révisions d'analyse

L'objet de ce problème est d'obtenir quelques résultats à propos de l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(g(x)).$$

La fonction g, qui est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est ici donnée et on cherche l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ des fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation précédente.

Dans la partie I, on traite le cas où $g(x) = ax + b$ avec a, b réels. Dans la partie II, on démontre, sous certaines hypothèses, que $\mathcal{E}(g)$ peut se réduire aux fonctions constantes. Enfin dans la partie III, on traite les cas où $g(x) = x^2$ et où $g(x) = \mathrm{e}^x$.

PARTIE I
Les fonctions continues vérifiant $f(x) = f(ax + b)$

Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tel que $|a| \neq 1$, on pose ici :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_{a,b}(x) = ax + b.$$

On se propose alors de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}(g_{a,b})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(g_{a,b}(x))$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(ax + b)$.

1. *Étude du cas* $|a| < 1$
   On considère ici la suite de premier terme $x_0 = x$, où x est un réel quelconque donné, et définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = ax_n + b$ où le réel a vérifie $|a| < 1$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de x_n en fonction de a, b, x et n.
   (b) Etudier la convergence de la suite (x_n).
   (c) Vérifier, si $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$, qu'on a $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   En déduire, si $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$ avec $|a| < 1$, qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{b}{1-a}\right)$.
   (d) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g_{a,b})$ lorsque $|a| < 1$.
2. *Étude du cas* $|a| > 1$
   (a) Établir (si $a \neq 0$) l'équivalence des deux relations suivantes pour f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
   $$(1)\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(ax + b) \quad ; \quad (2)\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right).$$
   (b) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g_{a,b})$ lorsque $|a| > 1$.

PARTIE II
Deux cas où les solutions de $f(x) = f(g(x))$ sont constantes

3. *Étude des points fixes de la fonction g lorsque* $|g'| \leq K < 1$
   On suppose ici que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H})$:
   $$\textit{Il existe un nombre réel positif } K < 1 \textit{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ |g'(x)| \leq K.$$
   (a) Établir, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, qu'on a pour tout réel x :
   $$g(0) - K|x| \leq g(x) \leq g(0) + K|x|.$$
   (b) En déduire les limites de la fonction $x \mapsto g(x) - x$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.
   (c) Étudier enfin le sens de variation de la fonction $x \mapsto g(x) - x$ et en déduire qu'il existe un unique point fixe de g, c'est-à-dire un unique nombre L tel que $g(L) = L$.
4. *Étude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque* $|g'| \leq K < 1$
   On garde les hypothèses et les notations de la question précédente (on a donc $g(L) = L$), et on considère la suite de premier terme $x_0 = x$, où $x \in \mathbb{R}$, et définie par $x_{n+1} = g(x_n)$.
   (a) Montrer que la suite (x_n) converge vers L.
   (b) Montrer que si $f \in \mathcal{E}(g)$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(L)$.
   (c) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g)$.
5. *Étude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque* $|g'| \geq K > 1$
   On suppose ici que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}')$:
   $$\textit{Il existe un nombre réel } K > 1 \textit{ tel que : } \forall x \in \mathbb{R},\ |g'(x)| \geq K.$$

(a) Montrer que g' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$, et qu'on a nécessairement :
• ou bien g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{-\infty} g = -\infty$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$,
• ou bien g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{-\infty} g = +\infty$ et $\lim_{+\infty} g = -\infty$.

(b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}, définie, continue et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Exprimer $\left(g^{-1}\right)'(x)$, et montrer que $\left|\left(g^{-1}\right)'(x)\right| \leq \frac{1}{K}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(c) Montrer que $f \in \mathcal{E}(g)$ si et seulement si $f \in \mathcal{E}\left(g^{-1}\right)$, et en déduire $\mathcal{E}(g)$.

PARTIE III
Les fonctions continues vérifiant $f(x) = f(x^2)$ et $f(x) = f(\mathrm{e}^x)$

6. *Recherche des fonctions continues telles que* $f(x) = f(x^2)$
On suppose dans cette question que $g(x) = x^2$, de sorte que $\mathcal{E}(g)$ désigne donc l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x^2)$.
On considère la suite de premier terme $x_0 = x$, où x est un réel strictement positif donné, et définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$.
   (a) Montrer que g ne vérifie ni l'hypothèse $(\mathcal{H})$, ni l'hypothèse $(\mathcal{H}')$
   (b) Pour tout entier naturel n, vérifier que $x_n = x^{1/2^n}$.
   En déduire la convergence de la suite (x_n), et préciser alors sa limite.
   (c) Établir, si f appartient à $\mathcal{E}(g)$, qu'on a $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $g(x) = x^2$.

7. *Recherche des fonctions continues telles que* $f(x) = f(e^x)$
Dans cette dernière partie, on cherche des fonctions non constantes f appartenant à $\mathcal{E}(\exp)$, qui est l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(e^x)$.
   (a) Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$, vérifier que $f(0) = f(1)$.
   (b) Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$ et si $x < 0$, vérifier que $f(x) = f(e^x)$ où $e^x \in [0, 1]$.
   (c) On considère la suite (x_n) définie par $x_0 = 0$, puis $x_{n+1} = e^{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   — Établir que $x_{n+1} \geq x_n + 1$, puis montrer que (x_n) est strictement croissante et $\lim x_n = +\infty$.
   — Établir que la fonction logarithme induit une bijection de $]x_{n+1}, x_{n+2}]$ sur $]x_n, x_{n+1}]$.
   — Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$, en déduire que : $\forall x \in]x_{n+1}, x_{n+2}],\ f(x) = f(\ln(x))$ où $\ln(x) \in]x_n, x_{n+1}]$.
   (d) Étant donnée une fonction continue $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition $\varphi(0) = \varphi(1)$, vérifier qu'il existe une et une seule fonction $f \in \mathcal{E}(\exp)$ qui coïncide avec φ sur $[0, 1]$.
   En déduire l'ensemble $\mathcal{E}(\exp)$.