# Devoir surveillé n° 9 :



**Mardi 10 juin**

**3 h**

**Les résultats doivent être encadrés.**

**Les calculatrices sont interdites.**

**Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.**

**Problème 1 :**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Un joueur lance successivement et de façon indépendante $n$ boules au hasard dans $N$ cases numérotées de 1 à $N$.
Chaque boule a la probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans chacune des $N$ cases.
On cherche à étudier la variable aléatoire $T_n$ égale au nombre de cases non vides après $n$ lancers.

1. Déterminer en fonction de $n$ et $N$ les valeurs que peut prendre $T_n$.
2. Donner les loi de $T_1$ et de $T_2$.

**Pour la suite, on prendra $n \geq 2$.**

3. Déterminer les probabilités $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = 2)$.
4. Calculer $P(T_n = n)$.
   *On pourra distinguer les cas $n \leq N$ et $n > N$.*
5. Prouver que, pour tout $k$ appartenant à $[\![1, n]\!]$, on a :

$$P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} P(T_n = k) + \frac{N - k + 1}{N} P(T_n = k - 1).$$

6. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) x^k.$$

   (a) Calculer $G_n(1)$ et $G_n'(1)$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2) G_n'(x) + x G_n(x).$$

   (c) En dérivant l'expression précédente, montrer que :

$$E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(T_n) + 1.$$

   (d) En déduire la valeur de $E(T_n)$ et déterminer sa limite quand $n$ tend vers $+\infty$.
   (e) Retrouver le résultat directement avec les variables aléatoires $X_i = 1$ si la $i$-ème case est pleine, 0 sinon.

**Problème 2 :**

Ce problème consiste à étudier un tirage dans un paquet de bonbons effectué par deux enfants Alice et Cyril.

Dans l'ensemble du problème :

- On dispose d'un paquet de bonbons qui contient uniquement des bonbons à la menthe et des nougats.
- On suppose que l'emballage des bonbons les rend indiscernables.
- Alice n'aime que les bonbons à la menthe et Cyril que les nougats.
- Le paquet de bonbons contient 10 nougats et 10 bonbons à la menthe.
- Alice tire 1 bonbon dans le paquet et le garde dans sa main puis Cyril fait de même.

On note :

- $X_A$ la variable aléatoire égale à 1 si Alice tire un bonbon à la menthe et égale à 0 si Alice tire un nougat.
- $X_C$ la variable aléatoire égale à 1 si Cyril tire un nougat et égale à 0 si Cyril tire un bonbon à la menthe.

1. (a) Quelle est la loi de $X_A$ ? On donnera son nom et la valeur du ou des paramètres.
   (b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de $X_A$.
2. (a) Déterminer $P((X_A = 0) \cap (X_C = 0))$.
   (b) Déterminer la loi conjointe du couple $(X_A, X_C)$.
3. En déduire la loi de $X_C$.
4. (a) Vérifier que la covariance $\operatorname{cov}(X_A, X_C)$ de $X_A$ et $X_C$ vaut $\frac{1}{76}$.
   (b) Les variables aléatoires $X_A$ et $X_C$ sont-elles indépendantes ?

Lorsqu'un enfant a tiré un bonbon qu'il n'aime pas, il le donne à l'autre enfant.
On note alors :

- $Y_A$ la variable aléatoire égale au nombre de bonbons à la menthe détenus par Alice après les dons éventuels ;
- $Y_C$ la variable aléatoire égale au nombre de nougats détenus par Cyril après les dons éventuels.

5. Justifier que l'univers image $Y_A(\Omega)$ de $Y_A$ est égal à $\{0, 1, 2\}$.
6. (a) Quelle est la loi de $Y = Y_A + Y_C$ ?
   (b) En déduire que la covariance $\operatorname{cov}(Y, Y_A)$ de $Y$ et $Y_A$ est nulle.
   (c) Démontrer que $\operatorname{cov}(Y, Y_A) = V(Y_A) + \operatorname{cov}(Y_A, Y_C)$.
   (d) En déduire le signe de $\operatorname{cov}(Y_A, Y_C)$.
7. Justifier que $Y_A = 1 + X_A - X_C$.
8. En déduire l'espérance de $Y_A$ et montrer que sa variance vaut $\frac{9}{19}$.
9. A l'aide des résultats de la question précédente, justifier que la loi de $Y_A$ n'est pas une loi binomiale.

**Problème 3 :**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\overline{C}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ obtenue en considérant le conjugué de chaque coefficient de $C$.
L'objectif de ce problème est d'étudier, pour $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ :

$$\det(I_n + C\overline{C}).$$

1. **Question préliminaire**
   Montrer que :
   $$\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(\overline{C}) = \overline{\det(C)}.$$
   On pourra raisonner par récurrence sur $n$.
2. On pose : $C = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -i & 2i \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(I_2 + C\overline{C}) \in \mathbb{R}^+$.
3. On pose : $C = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 2 & -i & 3 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(I_3 + C\overline{C}) \in \mathbb{R}^+$.
4. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $C$ est semblable à une matrice diagonale dans $\mathbb{R}$, alors :
   $$\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R} \text{ et } \det(I_n + C\overline{C}) \geq 1,$$
   avec égalité ssi $C = 0_n$.
5. Dans cette question, on pose
   $$C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$
   En effectuant des opérations élémentaires, calculer $\det(I_n + C\overline{C})$ et en déduire que $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}^+$.
6. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $C$ est triangulaire, alors :
   $$\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R} \text{ et } \det(I_n + C\overline{C}) \geq 1.$$
7. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $I_n + C^2 = (C + iI_n)(C - iI_n)$.
   (b) En déduire que :
   $$\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}^+,$$
   avec $\det(I_n + C\overline{C}) = 0$ ssi $C - iI_n \notin GL_n(\mathbb{R})$.

**Dans toute la suite du problème, on considère que $n = 3$.**
Si $A, B, C, D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on note :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

la matrice de $\mathcal{M}_6(\mathbb{C})$ dont les éléments sont ceux des matrices $A$, $B$, $C$ et $D$ indiqués par la position de ces matrices dans le découpage.
Par exemple :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_3 & I_3 \\ \hline 0_3 & I_3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On admettra que, pour tous $A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' + BC' & AB' + BD' \\ \hline CA' + DC' & CB' + DD' \end{array}\right) \quad \text{(même règle que pour le produit matriciel classique)}$$

Soit $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

8. (a) Montrer que :
   $$\left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_3 & 0_3 \\ \hline -\overline{C} & I_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_3 + C\overline{C} & -C \\ \hline 0 & I_3 \end{array}\right).$$

(b) Calculer $\det\left(\begin{array}{c|c} I_3 & 0_3 \\ \hline -\overline{C} & I_3 \end{array}\right)$.

(c) Montrer que : $\det\left(\begin{array}{c|c} I_3+C\overline{C} & -C \\ \hline 0_3 & I_3 \end{array}\right) = \det(I_3+C\overline{C})$.

(d) En déduire que :

$$\det(I_3+C\overline{C}) = \det\left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right).$$

9. (a) Soit $(r,s,t,u) \in \mathbb{C}^4$ et soit $(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base $(e_1,e_2)$ est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de $\varphi$ dans la base $(e_2,e_1)$.

(b) Soit $(R,S,T,U) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{C}))^4$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que la matrice $\left(\begin{array}{c|c} R & S \\ \hline T & U \end{array}\right) \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C})$ est semblable à la matrice $\left(\begin{array}{c|c} U & T \\ \hline S & R \end{array}\right)$. Montrer de même que la matrice $\left(\begin{array}{c|c} R & S \\ \hline T & U \end{array}\right) \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C})$ est semblable à la matrice $\left(\begin{array}{c|c} R & -S \\ \hline -T & U \end{array}\right)$.

10. (a) Montrer que $\left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right)$ et $\overline{\left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right)}$ sont semblables.

(b) En déduire que :

$$\det(I_3+C\overline{C}) \in \mathbb{R}.$$