Devoir à la maison n° 12 :

A rendre pour le : lundi 2 juin

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 : Les urnes de Pòlya

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire;
2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de ce problème est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Partie I - Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II - La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $P(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$.
5. A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b + r + n}.$$

6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Exprimer l'événement $(S_n = 1)$ avec les événements $(X_k = 0)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
8. Montrer que $P(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$. Calculer la probabilité $P(S_{n+1} = k | S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i)\ \ell \notin \{k-1, k\}, \qquad (ii)\ \ell = k-1, \qquad (iii)\ \ell = k.$$

10. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).$$

11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

Problème 2 :

On désigne par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. Pour tous k, n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

On pourra utiliser le fait que : $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Justifier que la suite $\left(\frac{1}{n^{k+1}} S_k(n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{k+1}$.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, N]\!]$. Démontrer que

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} P(X \geq i).$$

On dispose d'une boîte dans laquelle sont placés des jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à N. Soit k un entier naturel ≥ 2. On tire k fois de suite un jeton dans cette boîte. On note son numéro et on le remet dans la boîte. Les tirages sont indépendants les uns des autres. On note X_i la variable aléatoire qui prend comme valeur le numéro du jeton du $i^{\text{ème}}$ tirage, pour i dans $[\![1, k]\!]$. On suppose que la loi de X_i est uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On note U_k et V_k les variables aléatoires :

$$U_k = \min(X_1, \ldots, X_k) \text{ et } V_k = \max(X_1, \ldots, X_k).$$

3. Exprimer $E(X_1)$, $E(X_1^2)$ et $V(X_1)$ en fonction de N.
4. Soit k dans $\mathbb{N}^*$ supérieur à 2.
   (a) Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Justifier que :
   $$P(U_k \geq i) = \left(\frac{N - i + 1}{N}\right)^k.$$
   (b) Exprimer $E(U_k)$ en fonction de N à l'aide de la fonction S_k introduite au début de l'exercice. Donner un équivalent de $E(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.
5. (a) On introduit les variables $Y_i = N + 1 - X_i$, pour i dans $[\![1, k]\!]$. Justifier que les variables $Y_1, \ldots, Y_k$ sont indépendantes et de même loi. Préciser cette loi.
   (b) En déduire $E(V_k)$ et $V(V_k)$ en fonction de $E(U_k)$ et $V(U_k)$.
6. (a) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, N]\!]$, démontrer que :
   $$E(X^2) = \sum_{i=1}^{N} (2i - 1) P(X \geq i).$$
   (b) Exprimer $E(U_k^2)$ en fonction de N à l'aide des fonctions S_k et S_{k+1} introduites au début de l'exercice.
   (c) Exprimer $V(U_k)$ en fonction de N à l'aide des fonctions S_k et S_{k+1} introduites au début de l'exercice.
   (d) Donner un équivalent de $V(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.