Problème 3 : Une relation de récurrence non linéaire

1. - Supposons $(u_n)_{n\geq 1}$ constante égale à $C \in \mathbb{R}$. Alors :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, C = \frac{C^2}{\sqrt{n}}$$

   Donc $C = 0$, ainsi :

   $$a = 0.$$

   - Réciproquement, si $a = 0$ alors, il est clair que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0$$

   Donc (u_n) est constante.
   - Ainsi la suite (u_n) est constante ssi $a = 0$.
2. On a :

   $$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$$

   $$\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = l^2 \in \mathbb{R}$$

   donc :

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} = 0.$$

   Ainsi :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}}.$$

   Ainsi, par passage à la limite, on a :

   $$l = 0$$

3. - Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}\left(u_n - \sqrt{n}\right)$$

   Or :

   $$u_n \geq \sqrt{n} \geq 0$$

   Donc :

   $$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

   Ainsi (u_n) est croissante.
   - On a :

   $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty,$$

   donc, par minoration :

   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

4. (a) - Pour $n = k$, on a, par hypothèse :

   $$u_k < \sqrt{k}.$$

   - Soit $n \geq k$, supposons que $u_n < \sqrt{n}$, alors :

   $$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} < \frac{(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

   Donc :

   $$u_{n+1} < \sqrt{n+1}.$$

   - On a donc prouvé par récurrence que :

   $$\forall n \geq k, u_n < \sqrt{n}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^* \geq k$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}\left(u_n - \sqrt{n}\right)$$

Or :

$$u_n < \sqrt{n}$$

et il est clair que $u_n \geq 0$. Donc :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Ainsi $(u_n)_{n \geq k}$ est décroissante.

(c) La suite $(u_n)_{n \geq k}$ est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.
Ainsi (u_n) est convergente et, d'après la question 2 :

$$(u_n) \text{ converge vers } 0.$$

5. • Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $a \neq 0$, alors $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$.
Donc :

$$\ln u_{k+1} = 2 \ln u_k - \frac{1}{2} \ln k$$

On a alors :

$$\frac{\ln u_{k+1}}{2^{k+1}} = \frac{\ln u_k}{2^k} - \frac{\ln k}{2^{k+2}}$$

• Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_k = \frac{\ln u_k}{2^k}$. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ v_{k+1} - v_k = -\frac{\ln k}{2^{k+2}}$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{2^{k+2}}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1$$

Donc :

$$v_n = v_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{2^{k+2}}$$

Ainsi :

$$\frac{\ln u_n}{2^n} = \frac{\ln u_1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{2^{k+2}}$$

Donc :

$$\ln u_n = 2^{n-1} \ln a - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{2^{k+2-n}}$$

D'où :

$$u_n = \exp\left(2^{n-1} \ln a - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{2^{k+1-n}}\right)$$

Donc :

$$u_n = \frac{a^{2^{n-1}}}{\exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{2^{k+1-n}}\right)}$$

• On remarque que cette expression est également valable pour $n = 1$ et pour $a = 0$, on adonc, dans tous les cas :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{a^{2^{n-1}}}{\exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{2^{k+1-n}}\right)}$$

6. (a) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2^{n+2}} \ln(n+2) \geq 0$$

Donc $(s_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

ii. Par croissances comparées :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{(\sqrt{2})^n} = 0,$$

Comme $0 < 1$, on a :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, \frac{\ln(n+1)}{(\sqrt{2})^n} \leq 1.$$

iii. Soit $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}} + \sum_{k=N}^{n} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}} + \sum_{k=N}^{n} \frac{(\sqrt{2})^k}{2^{k+1}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{(\sqrt{2})^k} \\
&\leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{(\sqrt{2})^N} - \frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}}}{1 - \frac{1}{(\sqrt{2})}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{(\sqrt{2})^N}}{1 - \frac{1}{(\sqrt{2})}}
\end{aligned}$$

Comme la quantité $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{(\sqrt{2})^N}}{1 - \frac{1}{(\sqrt{2})}}$, la suite $(S_n)_{n\geq N}$ est majorée.
Ainsi $(s_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée.
Donc $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

(b)
- Si (u_n) est convergente, alors, d'après la question 2, (u_n) converge vers 0, donc il existe $k > 2$ tel que $u_k < 1$.
- S'il existe $k > 2$ tel que $u_k < 1$, alors $u_k < 1 < \sqrt{k}$.
  Donc, d'après 4.(c), (u_n) est convergente.

(c)
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{a^{2^{n-1}}}{\exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{2^{k+2-n}}\right)} \\
&= \frac{a^{2^{n-1}}}{\exp\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+3-n}}\right)} \\
&= \frac{a^{2^{n-1}}}{\exp\left(2^{n-2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}}\right)} \\
&= \frac{a^{2^{n-1}}}{\exp\left(2^{n-2} S_{n-2}\right)} \\
&= \left(\frac{a}{\exp(S_{n-2}/2)}\right)^{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

- Si $a < \exp(W/2)$.
  Comme $\lim_{n\to+\infty} \exp(S_{n-2}/2) = \exp(W/2)$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a}{\exp(S_{n-2}/2)} = \frac{a}{\exp(W/2)} < 1$$

  Soit $r \in \left]\frac{a}{\exp(W/2)}, 1\right[$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, 0 \leq \frac{a}{\exp(S_{n-2}/2)} \leq r$$

  Donc :

$$\forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq r^{2^{n-1}}$$

  Or :

$$\lim_{n\to+\infty} r^{2^{n-1}} = 0$$

  Donc (u_n) converge vers 0.
- Si (u_n) est convergente.
  Alors il existe $k > 2$ tel que $u_k < 1$. Donc :

$$\left(\frac{a}{\exp(S_{k-2}/2)}\right)^{2^{k-1}} < 1$$

D'où :

$$\frac{a}{\exp\left(S_{k-2}/2\right)} < 1$$

Ainsi :

$$a < \exp\left(S_{k-2}/2\right)$$

Or, comme (S_n) est croissante, $S_{k-2} \leq W$, ainsi :

$$a < \exp\left(W/2\right)$$

- La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc convergente si et seulement si $a < \exp\frac{W}{2}$, où $W = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.