Problème 2 : Matrices magiques

1. Posons $MV = (a_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M^T V = (b_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Soit $i \in [\![1,n]\!]$, on a :
$$a_i = \sum_{j=1}^n m_{i,j}1 = \sum_{j=1}^n m_{i,j} \text{ et } b_i = \sum_{j=1}^n m_{j,i}1 = \sum_{j=1}^n m_{j,1}.$$
$$\begin{aligned} M \text{ semi-magique ssi } & \exists\sigma(M), \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^n m_{i,j} = \sigma(M) \text{ et } \sum_{j=1}^n m_{j,i} = \sigma(M), \\ \text{ssi } & \exists\sigma(M), \forall i \in [\![1,n]\!], a_i = \sigma(M) \text{ et } b_i = \sigma(M), \\ \text{ssi } & \exists\sigma(M),\ MV = \sigma(M)V \text{ et } M^T V = \sigma(M)V, \\ \text{ssi } & V \text{ est un vecteur propre de } M \text{ et } M^T \text{ associé à la même valeur propre.} \end{aligned}$$

2. (a)
   - Soit $M = (m_{i,j}) \in SM_n$, soit $N = (n_{i,j}) \in SM_n$. Posons $\sigma(\lambda M + \mu N) = \lambda\sigma(M) + \mu\sigma(N)$.
     Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$,
$$\sum_{j=1}^n (\lambda m_{i,j} + \mu n_{i,j}) = \lambda \sum_{j=1}^n m_{i,j} + \mu \sum_{j=1}^n n_{i,j} = \lambda\sigma(M) + \mu\sigma(N) = \sigma(\lambda M + \mu N).$$
$$\sum_{i=1}^n (\lambda m_{i,j} + \mu n_{i,j}) = \lambda \sum_{i=1}^n m_{i,j} + \mu \sum_{i=1}^n n_{i,j} = \lambda\sigma(M) + \mu\sigma(N) = \sigma(\lambda M + \mu N).$$
     Donc $\lambda M + \mu N \in SM_n$.
   - Soit $M = (m_{i,j}) \in MG_n$, soit $N = (n_{i,j}) \in MG_n$. Posons $\sigma(\lambda M + \mu N) = \lambda\sigma(M) + \mu\sigma(N)$. D'après le point précédent : $\lambda M + \mu N \in SM_n$.
     Soit $i \in [\![1,n]\!]$,
$$\mathrm{tr}(\lambda M + \mu N) = \lambda \sum_{i=1}^n m_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^n n_{i,i} = \lambda\sigma(M) + \mu\sigma(N) = \sigma(\lambda M + \mu N).$$
$$\begin{aligned} \sum_{i,j\in[\![1,n]\!], i+j=n+1} (\lambda m_{i,j} + \mu n_{i,j}) &= \lambda \sum_{i,j\in[\![1,n]\!], i+j=n+1} m_{i,j} + \mu \sum_{i,j\in[\![1,n]\!], i+j=n+1} n_{i,j} \\ &= \lambda\sigma(M) + \mu\sigma(N) = \sigma(\lambda M + \mu N). \end{aligned}$$
     Donc $\lambda M + \mu N \in MG_n$.

   (b) Soit $M = (m_{i,j}) \in SM_n$, soit $N = (n_{i,j}) \in SM_n$.
   Posons $MN = (a_{i,j})$.
   On a : $\forall i, j \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} n_{k,j}$.
   - Soit $i \in [\![1,n]\!]$,
$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{i,k} n_{k,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} \left(\sum_{j=1}^n n_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^n m_{i,k}\sigma(N) = \sigma(M)\sigma(N).$$
   - Soit $j \in [\![1,n]\!]$,
$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{i,k} n_{k,j} = \sum_{k=1}^n \left(n_{k,j} \sum_{i=1}^n m_{i,k} \right) = \sum_{k=1}^n n_{k,j}\sigma(M) = \sigma(N)\sigma(M).$$

   Donc, en posant $\sigma(MN) = \sigma(M)\sigma(N)$, on a : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sigma(MN)$ et $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sigma(MN)$.

   Donc MN est semi-magique.

3. - Posons $\sigma(E) = n$.
     - Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^n e_{i,j} = \sum_{j=1}^n 1 = n = \sigma(E)$.
     - Soit $j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^n e_{i,j} = \sum_{i=1}^n 1 = n = \sigma(E)$.

- $\mathrm{tr}(E) = \sum_{i=1}^{n} e_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n = \sigma(E)$.
- $\sum_{i,j\in[\![1,n]\!],i+j=n+1} e_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} e_{i,n+1-i} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n = \sigma(E)$.

Donc E est magique.

- – Pour $p = 1$, $E^p = E = n^{p-1}E$.
  – Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que $E^p = n^{p-1}E$.
  Alors $E^{p+1} = E^p.E = n^{p-1}E^2 = n^{p-1}.nE = n^pE$.
  – Ainsi, par récurrence :

$$\forall p \geq 1, E^p = n^{p-1}E.$$

4. Soit $M = (m_{i,j}) \in SM_n$.

$$EM = \left(\sum_{k=1}^{n} e_{i,k}m_{k,j}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{k,j}\right) = (\sigma(M)) = \sigma(M)E,$$

$$ME = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}e_{k,j}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\right) = (\sigma(M)) = \sigma(M)E.$$

Donc :

$$EM = \sigma(M)E = ME.$$

5. (a)
- Si $c \neq 0$, $M^3 + aM^2 + bM + cI_3 = 0$. Donc $M^3 + aM^2 + bM = -cI_3$. Ainsi $M(M^2 + aM + bI_3) = -cI_3$. Donc $M(\frac{-1}{c}(M^2 + aM + bI_3)) = I_3$.
  Ainsi M est inversible (et $M^{-1} = \frac{-1}{c}(M^2 + aM + bI_3)$).
- On a $\sigma(M) = \mathrm{tr}(M) = 0$, donc d'après la question précédente $EM = 0$, ainsi $EMM^{-1} = 0$ d'où $E = 0$ ce qui est absurde. Donc : $c = 0$.
- On a $c = 0$ et $a = -\mathrm{tr}(M) = 0$. Donc $M^3 + bM = 0$.
  Posons $\lambda = -b$, alors : $M^3 = \lambda M$.
- Montrons que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $M^{2p+1} = \lambda^p M$.
  – Pour $p = 0$, $M^{2p+1} = M = \lambda^p M$.
  – Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que $M^{2p+1} = \lambda^p M$.
  Alors :

$$M^{2(p+1)+1} = M^{2p+1}.M^2 = (\lambda^p M).M^2 = \lambda^p M^3 = \lambda^p.\lambda M = \lambda^{p+1}M.$$

  – Ainsi, par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}$, $M^{2p+1} = \lambda^p M$.
- Comme M est magique, alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $M^{2p+1} = \lambda^p M$ est magique.
  Donc pour tout entier p impair, M^p est magique.

(b)
- On a : $M^p = \left(M_0 + \frac{1}{3}\mathrm{tr}(M)E\right)^p$. Or, d'après 4. $EM = ME$ donc $M_0E = EM_0$, ainsi, d'après la formule du binôme de Newton :

$$M^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} M_0^k \left(\frac{1}{3}\mathrm{tr}(M)E\right)^{p-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{1}{3^{p-k}}\mathrm{tr}(M)^{p-k}M_0^kE^{p-k} \qquad = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} \frac{1}{3^{p-k}}\mathrm{tr}(M)^{p-k}n^{p-k-1}M_0^kE + M_0^p.$$

- Montrons que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_0^kE = \sigma(M_0)^kE$.
  – Pour $k = 0$, $M_0^kE = E = \sigma(M_0)^kE$.
  – Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $M_0^kE = \sigma(M_0)^kE$.
  Comme $M, E \in SM_n$, on a : $M_0 \in SM_n$ donc :

$$M_0^{k+1}E = M_0^k.M_0E = \sigma(M_0)M_0^kE = \sigma(M_0).\sigma(M_0)^kE = \sigma(M_0)^{k+1}E.$$

  – Donc, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_0^kE = \sigma(M_0)^kE$.
- Ainsi :

$$M^p = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} \frac{1}{3^{p-k}}\mathrm{tr}(M)^{p-k}n^{p-k-1}\sigma(M_0)^kE + M_0^p.$$

- Comme E est magique, alors $\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} \frac{1}{3^{p-k}}\mathrm{tr}(M)^{p-k}n^{p-k-1}\sigma(M_0)^kE$ est magique.
- M_0 est magique et $\mathrm{tr}(M_0) = \mathrm{tr}(M) - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(M).\mathrm{tr}(E) = \mathrm{tr}(M) - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(M).3 = 0$, donc, d'après la question précédente, M_0^p est magique pour p impair.
- Ainsi, si p est impair, M^p est magique.

6. (a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_4.$$

(b)
- Pour $p = 0$,posons $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, alors $A^p = I_4 = a_p A + b_p I_4$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe deux entiers positifs a_p et b_p tels que : $A^p = a_p A + b_p I_4$.

$$A^{p+1} = A.A^p = a_p A^2 + b_p A = a_p(A + 2I_4) + b_p A = (a_p + b_p)A + 2a_p I_4.$$

  Posons $a_{p+1} = a_p + b_p$ et $b_{p+1} = 2a_p$. Alors a_{p+1} et b_{p+1} sont deux entiers positifs tels que $A^{p+1} = a_{p+1}A + b_{p+1}B$.
- Donc, par récurrence,pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers positifs a_p et b_p tels que : $A^p = a_p A + b_p Id$.

(c) Soit $p \geq 2$, supposons A^p magique. Alors, comme A est magique, $A^p - a_p A$ est magique. Donc $b_p I_4$ est magique.
Or $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ et $a_2 = 1 > 0$, $b_2 = 2 > 0$. De plus : $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{p+1} = a_p + b_p$ et $b_{p+1} = 2a_p$, donc, par récurrence immédiate : $\forall p \geq 2$, $b_p > 0$.
Ainsi I_4 est magique, ce qui est absurde.
Donc A^p n'est pas magique.