CORRECTION

DS 9

Problème 1 :

1) • Le nombre minimal de cases non vides est 1, il s'agit du cas où toutes les boules sont dans la même case.

• Si $n \geq N$, il peut y avoir N cases non vides ce qui correspond au maximum.

• Si $n < N$, le nombre maximal de cases non vides est n, il s'agit du cas où toutes les boules sont dans des cases différentes.

Donc :
$$\boxed{T_n(\Omega) = \begin{cases} [\![1, N]\!] & \text{si } n \geq N \\ [\![1, n]\!] & \text{si } n < N \end{cases}}$$

2) Comme $N \geq 2$, $T_1(\Omega) = \{1\}$ et $T_2(\Omega) = \{1, 2\}$.

• Pour $n = 1$, il n'y a qu'une boule donc qu'une case non vide.

Donc $\boxed{P(T_1 = 1) = 1.}$

• Pour $n = 2$, on a : $\text{Card}(\Omega) = N^2$ et $(T_2 = 1)$ signifie que les 2 boules sont dans la même case. Comme il y a N cases, $\text{Card}(T_2 = 1) = N$.

Donc $P(T_2 = 1) = \dfrac{N}{N^2} = \dfrac{1}{N}$ et $P(T_2 = 2) = 1 - P(T_2 = 1) = 1 - \dfrac{1}{N}$

Ainsi $\boxed{P(T_2 = 1) = \dfrac{1}{N} \quad \text{et} \quad P(T_2 = 2) = 1 - \dfrac{1}{N}}$

3) • On a : $\text{Card}(\Omega) = N^n$.

• $(T_n = 1)$ signifie que toutes les boules sont dans une des N cases donc $\text{Card}(T_n = 1) = N$

Ainsi $P(T_n = 1) = \dfrac{N}{N^n}$ donc : $\boxed{P(T_n = 1) = \dfrac{1}{N^{n-1}}}$

• On dénombre $(T_n = 2)$:

- choix des 2 cases : $\binom{N}{2}$ possibilités.
- choix d'un tirage de n boules dans les 2 cases, à l'exception des 2 tirages où les boules sont dans la même case : $2^n - 2$ possibilités.

Donc $\text{Card}(T_n = 2) = \binom{N}{2}(2^n - 2) = \dfrac{N(N-1)}{2}(2^n - 2) = N(N-1)(2^{n-1} - 1)$

Donc : $\boxed{P(T_n = 2) = \dfrac{(N-1)(2^{n-1} - 1)}{N^{n-1}}}$

4- • si $n > N$, $T_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$ et $n \notin T_n(\Omega)$ donc $P(T_n = n) = 0$

• si $n \leq N$, on a : $\mathrm{Card}(\Omega) = N^n$.

$(T_n = n)$ signifie que chaque boule est dans une case différente, cela revient à choisir un n-uplet de $[\![1, N]\!]$ d'éléments deux à deux distincts.

Donc $\mathrm{Card}(T_n = n) = \dfrac{N!}{(N-n)!}$. Donc $P(T_n = n) = \dfrac{N!}{(N-n)!\,N^n}$.

Ainsi $\boxed{P(T_n = n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > N \\ \dfrac{N!}{(N-n)!\,N^n} & \text{si } n \leq N \end{cases}}$

5- Soit $k \in [\![1, n]\!]$, $(T_n = j)_{j \in [\![1, N]\!]}$ forme un système complet d'événements.

Donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T_{n+1} = k) = \sum_{j=1}^{N} P(T_{n+1} = k \mid T_n = j)\, P(T_n = j).$$

Or, sachant $(T_n = j)$, il y a j cases non vides après le n^e lancer, ainsi le nombre de cases non vides après un lancer supplémentaire est j ou $j+1$. Donc :

$$P(T_{n+1} = k) = P(T_{n+1} = k \mid T_n = k)\, P(T_n = k) + P(T_{n+1} = k \mid T_n = k-1)\, P(T_n = k-1)$$

Or : • sachant $(T_n = k)$, $(T_{n+1} = k)$ signifie que la $(n+1)^e$ boule est dans l'une des k cases non vides donc $P(T_{n+1} = k \mid T_n = k) = \dfrac{k}{N}$

• sachant $(T_n = k-1)$, $(T_{n+1} = k)$ signifie que la $(n+1)^e$ boule est dans l'une des $(N-(k-1))$ urnes vides donc $P(T_{n+1} = k \mid T_n = k) = \dfrac{N-k+1}{N}$

Ainsi $\boxed{P(T_{n+1} = k) = \dfrac{k}{N} P(T_n = k) + \dfrac{N-k+1}{N} P(T_n = k-1)}$.

6-a) • $G_n(1) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k)$ or $(T_n = k)_{k \in [\![1, n]\!]}$ forme un système complet d'événements

Donc $\boxed{G_n(1) = 1}$

• $G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) \cdot k$. Or $T_n(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$.

Donc $\boxed{G_n'(1) = E(T_n)}$.

b) $G_{n+1}(x) = \sum_{\ell=1}^{n+1} P(T_{n+1} = \ell)\, x^\ell$ (3)

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{\ell}{N} P(T_n = \ell) + \frac{N-\ell+1}{N} P(T_n = \ell-1) \right) x^\ell + P(T_{n+1} = n+1)\, x^{n+1}$$

$$= \frac{x}{N} \sum_{\ell=1}^{n} \ell P(T_n = \ell)\, x^{\ell-1} + \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^{n} (N-\ell+1) P(T_n = \ell-1)\, x^\ell + P(T_{n+1} = n+1)\, x^{n+1}$$

$$= \frac{x}{N} G_n'(x) + \sum_{\ell=1}^{n} P(T_n = \ell-1)\, x^\ell - \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^{n} (\ell-1) P(T_n = \ell-1)\, x^\ell + P(T_{n+1} = n+1)\, x^{n+1}$$

$$\underset{j=\ell-1}{=} \frac{x}{N} G_n'(x) + \sum_{j=0}^{n-1} P(T_n = j)\, x^{j+1} - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{n-1} j P(T_n = j)\, x^{j+1} + P(T_{n+1} = n+1)\, x^{n+1}$$

$$= \frac{x}{N} G_n'(x) + x\left(G_n(x) - P(T_n = n)\, x^n \right) - \frac{x^2}{N} \left(G_n'(x) - n P(T_n = n)\, x^{n-1} \right) + P(T_{n+1} = n+1)\, x^{n+1}$$

$$= \frac{1}{N} (x - x^2)\, G_n'(x) + x\, G_n(x) + x^{n+1} \left(- P(T_n = n) + \frac{n}{N} P(T_n = n) + P(T_{n+1} = n+1) \right)$$

Or : $- P(T_n = n) + \frac{n}{N} P(T_n = n) + P(T_{n+1} = n+1)$

$$= P(T_{n+1} = n+1) - \frac{(N-n)}{N} P(T_n = n).$$

$$= \begin{cases} 0 - 0 & \text{si } n > N \\ \dfrac{N!}{(N-(n+1))!\, N^{n+1}} - \dfrac{N-n}{N} \dfrac{N!}{(N-n)!\, N^n} & \text{si } n+1 \leq N \text{ c'est-à-dire } n < N \\ 0 - 0 & \text{si } n = N \end{cases}$$

$= 0$ dans tous les cas.

Donc : $\boxed{G_{n+1}(x) = \frac{1}{N} (x - x^2)\, G_n'(x) + x\, G_n(x).}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$, en dérivant :

$$G_{n+1}'(x) = \frac{1}{N} (1 - 2x)\, G_n'(x) + \frac{1}{N} (x - x^2)\, G_n''(x) + G_n(x) + x\, G_n'(x)$$

Donc $G_{n+1}'(1) = \frac{1}{N} (-1)\, G_n'(1) + \frac{1}{N} \cdot 0 \cdot G_n''(1) + G_n(1) + G_n'(1)$

Ainsi $\boxed{E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(T_n) + 1}$

d) • Soit $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = \left(1-\frac{1}{N}\right)\ell + 1 \iff \ell = N$

Soit $n \geq 2$, $E(T_{n+1}) - N = \left(1-\frac{1}{N}\right)(E(T_n) - N)$

Donc $E(T_n) - N = \left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-2}(E(T_2) - N)$

Or $E(T_2) = \frac{1}{N} + 2\left(1-\frac{1}{N}\right) = 2 - \frac{1}{N}$

D'où $E(T_n) = N + \left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-2}\left(2-\frac{1}{N}-N\right)$

$= N + \left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-2}\left(1-\frac{1}{N}\right)(1-N)$

Donc : $\boxed{E(T_n) = N + \left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}(1-N)}$ et comme $\left|1-\frac{1}{N}\right| < 1$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = N}$

e) On a : $T_n = \sum_{i=1}^{N} X_i$ donc $E(T_n) = \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = \sum_{i=1}^{N} P(X_i = 1)$.

$= \sum_{i=1}^{N}(1 - P(X_i = 0)) = N - \sum_{i=1}^{N} P(X_i = 0)$.

Or $(X_i = 0)$ signifie que la i^e case est vide, la répartition se fait donc dans les $N-1$ autres cases. Donc : $P(X_i = 0) = \frac{(N-1)^n}{N^n} = \left(1-\frac{1}{N}\right)^n$.

Ainsi $\boxed{E(T_n) = N - \left(1-\frac{1}{N}\right)^n(N-1)}$

Problème 2 :

1-a) $X_A(\Omega) = \{0,1\}$, $P(X_A = 1) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ (10 bonbons à la menthe et 20 bonbons au total).

Donc $\boxed{X_A \sim \mathcal{B}\left(\tfrac{1}{2}\right). \text{ Il s'agit d'une loi de Bernoulli}}$

b) $\boxed{E(X_A) = \frac{1}{2} \quad \text{et } V(X_A) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}}$

2-a) $P((X_A = 0) \cap (X_C = 0)) = P(X_A = 0)\, P(X_C = 0 \mid X_A = 0)$

$= \frac{1}{2} P(X_C = 0 \mid X_A = 0)$

Or sachant $(X_A = 0)$, le paquet est composé de 9 nougats et de 10 bonbons à la menthe

donc $P(X_C = 0 \mid X_A = 0) = \frac{10}{19}$

Donc $\boxed{P((X_A = 0) \cap (X_C = 0)) = \frac{10}{38} = \frac{5}{19}}$

b) De même $P((X_A=0)\cap(X_C=1)) = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{19} = \frac{9}{38}$

$$P((X_A=1)\cap(X_C=0)) = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{19} = \frac{9}{38}$$

$$P((X_A=1)\cap(X_C=1)) = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{19} = \frac{10}{38} = \frac{5}{19}$$

Donc :

$X_A \backslash X_C$	0	1
0	$\frac{5}{19}$	$\frac{9}{38}$
1	$\frac{9}{38}$	$\frac{5}{19}$

3) En sommant sur les colonnes : $P(X_C=0) = \frac{5}{19} + \frac{9}{38} = \frac{19}{38} = \frac{1}{2}$

Donc $\boxed{X_C \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$

4-a) $\mathrm{cov}(X_A, X_C) = E(X_A X_C) - E(X_A)E(X_C) = E(X_A X_C) - \frac{1}{4}$.

Or : $E(X_A X_C) = P(X_A X_C = 1) = P((X_A=1)\cap(X_C=1)) = \frac{5}{19}$.

Donc $\mathrm{cov}(X_A, X_C) = \frac{5}{19} - \frac{1}{4} = \frac{20-19}{76}$. D'où $\boxed{\mathrm{cov}(X_A, X_C) = \frac{1}{76}}$.

b) $\mathrm{cov}(X_A, X_C) \neq 0$ donc $\boxed{X_A \text{ et } X_C \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

5- Après le tirage, chaque enfant a au plus un bonbon. Après un don, il en a donc au plus deux. Donc : $\boxed{Y_A(\Omega) = \{0, 1, 2\}}$

6-a) $Y = Y_A + Y_C$ est le nombre de bonbons détenus par les enfants, soit le nombre de bonbons tirés. Donc : $\boxed{Y = 2}$.

b) $\mathrm{cov}(Y, Y_A) = \mathrm{cov}(2, Y_A) = E(2Y_A) - E(2)E(Y_A) = 2E(Y_A) - 2E(Y_A)$

D'où $\boxed{\mathrm{cov}(Y, Y_A) = 0}$.

c) $\mathrm{cov}(Y, Y_A) = E(YY_A) - E(Y)E(Y_A) = E(Y_A^2 + Y_A Y_C) - (E(Y_A) + E(Y_C))E(Y_A)$

$$= E(Y_A^2) - E(Y_A)^2 + E(Y_A Y_C) - E(Y_A)E(Y_C)$$

Donc $\boxed{\mathrm{cov}(Y, Y_A) = V(Y_A) + \mathrm{cov}(Y_A, Y_C)}$.

d) Ainsi $V(Y_A) + cov(Y_A, Y_C) = 0$ donc $cov(Y_A, Y_C) = -V(Y_A)$.

D'où : $\boxed{cov(Y_A, Y_C) \leq 0}$.

7- $1 - X_C$ est le nombre de bonbons donnés par Cyril à Alice.

Donc : $\boxed{Y_A = X_A + 1 - X_C}$.

8- • $E(Y_A) = E(X_A) + 1 - E(X_C) = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}$ donc $\boxed{E(Y_A) = 1}$

• $V(Y_A) = V(X_A - X_C) = V(X_A) - 2\,cov(X_A, X_C) + V(X_C)$

$= \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{76} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{38} = \frac{19-1}{38} = \frac{18}{38}$

D'où : $\boxed{V(Y_A) = \frac{9}{19}}$

9- Si $Y_A \sim \mathcal{B}(n, p)$, comme $Y_A(\Omega) = [\![0, 2]\!]$, on a $n = 2$.

Ainsi $E(Y_A) = np$ or $E(Y_A) = 1$ donc $p = \frac{1}{2}$. Ainsi $V(Y_A) = np(1-p) = \frac{1}{2}$

ce qui est absurde. Donc $\boxed{Y_A \text{ ne suit pas une loi binomiale.}}$

Problème 3 :

1- • Pour $n = 1$, soit $C = (a) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $\det(\overline{C}) = \overline{a} = \overline{\det(C)}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que : $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\overline{C}) = \overline{\det(C)}$.

Soit $C \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$. Soit, pour tout $i, j \in [\![1, n+1]\!]$, $C_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice obtenue à partir de C en rayant la i^e ligne et la j^e colonne.

En développant par rapport à la $1^{ère}$ ligne :

$$\det(\overline{C}) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j}\, \overline{c_{1,j}} \det(\overline{C_{1,j}}) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j}\, \overline{c_{1,j}}\, \overline{\det(C_{1,j})}$$ par hypothèse de récurrence

$$= \overline{\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} c_{1,j} \det(C_{1,j})} = \overline{\det(C)}$$

• Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(\overline{C}) = \overline{\det(C)}}$.

2)
$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -i & -1 \\ i & -2i \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i & -1 \\ -i & 2i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1-i & i \\ -3 & i+4 \end{pmatrix} \end{array}$$
donc $I_2 + C\overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-i & i \\ -3 & i+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-i & i \\ -3 & i+5 \end{pmatrix}$

D'où $\det(I_2 + C\overline{C}) = (2-i)(5+i) + 3i = 10 - 3i + 1 + 3i = 11$

Donc $\boxed{\det(I_2 + C\overline{C}) \in \mathbb{R}^+}$.

3)

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 2 & i & 3 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 2 & -i & 3 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2i & 3 \\ -4i & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

donc $I_3 + C\overline{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2i & 3 \\ -4i & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

D'où $\det(I_3 + C\overline{C}) = 140 - 42 - 40 = 58$

Ainsi $\boxed{\det(I_3 + C\overline{C}) \in \mathbb{R}^+}$

4) Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que $C = PDP^{-1}$.

Alors $I_n + C\overline{C} = I_n + PDP^{-1}PDP^{-1} = PI_nP^{-1} + PD^2P^{-1} = P(I_n + D^2)P^{-1}$.

D'où $\det(I_n + C\overline{C}) = \det(1 + \lambda_1^2, \dots, 1 + \lambda_n^2) = \prod_{k=1}^{n}(1 + \lambda_k^2)$.

Or : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k^2 \geqslant 0$ et $\lambda_k = 0 \iff \lambda_k = 0$.

Donc $\boxed{\det(I_n + C\overline{C}) \geqslant 1}$ et $\det(I_n + C\overline{C}) = 1 \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0$

ainsi $\boxed{\det(I_n + C\overline{C}) = 1 \iff C = 0_n}$.

5) On a : $\overline{C} = C$ et

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} \end{array}$$

donc $C\overline{C} = C^2 = nC$.

Ainsi $\det(I_n + C\overline{C}) = \begin{vmatrix} 1+n & n & \cdots & n \\ n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n \\ n & \cdots & n & 1+n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+n^2 & & & n \\ 1+n^2 & 1+n & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1+n^2 & n & & 1+n \end{vmatrix}$ $C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$

$$= \begin{vmatrix} 1+n^2 & n & \cdots & n \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}$$ $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $L_i \leftarrow L_i - L_1$

Donc $\boxed{\det(I_n + C\overline{C}) = 1 + n^2}$

On a donc : $\boxed{\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}^+}$

6) Supposons C triangulaire supérieure : $C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Alors $\overline{C} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$ et $C\overline{C} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}$

Donc $\det(I_n + C\overline{C}) = \begin{vmatrix} 1+|\lambda_1|^2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1+|\lambda_n|^2 \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n}(1 + |\lambda_k|^2)$

Donc $\boxed{\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R} \text{ et } \det(I_n + C\overline{C}) \geq 1}$

7-a) $(C + iI_n)(C - iI_n) = C^2 + iC - iC + I_n$ donc $\boxed{(C+iI_n)(C-iI_n) = C^2 + I_n}$

b) $\det(I_n + C\overline{C}) = \det(I_n + C^2) = \det((C+iI_n)(C-iI_n)) = \det(C+iI_n)\det(C-iI_n)$

$= \det(\overline{C - iI_n})\det(C - iI_n) = \overline{\det(C-iI_n)}\det(C-iI_n)$

$= |\det(C-iI_n)|^2$

Donc $\boxed{\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}^+}$

et $\det(I_n + C\overline{C}) = 0$ ssi $\det(C - iI_n) = 0$

Donc $\boxed{\det(I_n + C\overline{C}) = 0 \text{ ssi } C - iI_n \notin GL_n(\mathbb{R}).}$

8-a) $\left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_3 & O_3 \\ \hline -\overline{C} & I_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_3 + C\overline{C} & I_3 O_3 - C I_3 \\ \hline \overline{C} I_3 - I_3\overline{C} & \overline{C} O_3 + I_3 \end{array}\right)$

Donc $\boxed{\left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_3 & O_3 \\ \hline -\overline{C} & I_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_3 + C\overline{C} & -C \\ \hline 0 & I_3 \end{array}\right).}$

b) $\left(\begin{array}{c|c} I_3 & O_3 \\ \hline -\overline{C} & I_3 \end{array}\right)$ est triangulaire inférieure de diagonale $(1, \dots, 1)$.

Donc : $\boxed{\det\left(\begin{array}{c|c} I_3 & O_3 \\ \hline -\overline{C} & I_3 \end{array}\right) = 1.}$

c) $\det\left(\begin{array}{c|c} I_3 + C\overline{C} & -C \\ \hline O_3 & I_3 \end{array}\right) = \left|\begin{array}{c|c} I_3 + C\overline{C} & -C \\ \hline O_3 & \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} I_3 + C\overline{C} & * \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0 & 0\ 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} I_3 + C\overline{C} & * \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right|$

donc $\boxed{\det\left(\begin{array}{c|c} I_3 + C\overline{C} & -C \\ \hline O_3 & I_3 \end{array}\right) = \det(I_3 + C\overline{C})}$

d) D'après a) $\det\left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right) \cdot \det\left(\begin{array}{c|c} I_3 & O_3 \\ \hline -\overline{C} & I_3 \end{array}\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} I_3 + C\overline{C} & -C \\ \hline 0 & I_3 \end{array}\right)$

D'où $\boxed{\det\left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right) = \det(I_3 + C\overline{C})}$

9-a) $\varphi(e_2) = s e_1 + u e_2 = u e_2 + s e_1$

$\varphi(e_1) = r e_1 + t e_2 = t e_2 + r e_1$

donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{(e_2, e_1)}(\varphi) = \begin{pmatrix} u & t \\ s & r \end{pmatrix}}$.

b) • Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à $\left(\begin{array}{c|c} R & S \\ \hline T & U \end{array}\right)$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ la base canonique de $\mathbb{C}^6$.

Alors $\mathcal{B}' = (e_4, e_5, e_6, e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{C}^6$.

$\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_3 \\ \hline I_3 & 0 \end{array}\right)$ et $\mathrm{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_3 \\ \hline I_3 & 0 \end{array}\right)$.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B})\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)\, \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_3 \\ \hline I_3 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} R & S \\ \hline T & U \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_3 \\ \hline I_3 & 0 \end{array}\right)$

$= \left(\begin{array}{c|c} T & U \\ \hline R & S \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_3 \\ \hline I_3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} U & T \\ \hline S & R \end{array}\right)$

Donc $\boxed{\left(\begin{array}{c|c} R & S \\ \hline T & U \end{array}\right) \text{ et } \left(\begin{array}{c|c} U & T \\ \hline S & R \end{array}\right) \text{ sont semblables}}$

• De même avec $\mathcal{B}'' = (e_1, e_2, e_3, -e_4, -e_5, -e_6)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} R & -S \\ \hline -T & U \end{array}\right)$

Donc $\boxed{\left(\begin{array}{c|c} R & S \\ \hline T & U \end{array}\right) \text{ et } \left(\begin{array}{c|c} R & -S \\ \hline -T & U \end{array}\right) \text{ sont semblables}}$

10-a) $\left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right)$ est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} I_3 & \overline{C} \\ \hline -C & I_3 \end{array}\right)$ qui est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} I_3 & -\overline{C} \\ \hline C & I_3 \end{array}\right) = \overline{\left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right)}$

Donc $\boxed{\left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right) \text{ et } \overline{\left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right)} \text{ sont semblables}}$

b) Donc $\det \left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right) = \det \overline{\left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right)} = \overline{\det \left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right)}$. Ainsi $\det \left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right) \in \mathbb{R}$.

Or $\det(I_3 + C\overline{C}) = \det \left(\begin{array}{c|c} I_3 & -C \\ \hline \overline{C} & I_3 \end{array}\right)$

D'où : $\boxed{\det(I_3 + C\overline{C}) \in \mathbb{R}}$