CORRECTION DM 12

Problème 1 :

1 - Au moment du premier tirage, l'urne est composée de b boules blanches et de r boules rouges. Donc $P(X_1 = 1) = \frac{b}{b+r}$.

Ainsi $\boxed{X_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)}$

2 - • Sachant $X_1 = 1$, l'urne est composée de $b+1$ boules blanches et de r boules rouges.

Donc $P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{b+1}{b+1+r}$

Ainsi, $\boxed{\text{sachant } X_1 = 1, \ X_2 \text{ suit une loi } \mathcal{B}\left(\frac{b+1}{b+1+r}\right)}$

• De même, $P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = \frac{b}{b+1+r}$

D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet $(X_1 = 0, X_1 = 1)$,

on a :
$$P(X_2 = 1) = P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) P(X_1 = 0) + P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) P(X_1 = 1)$$
$$= \frac{b}{b+1+r} \cdot \frac{r}{b+r} + \frac{b+1}{b+1+r} \cdot \frac{b}{b+r}$$
$$= \frac{b(b+1+r)}{(b+1+r)(b+r)} = \frac{b}{b+r}.$$

Donc $\boxed{X_2 \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)}$

3 - • $\boxed{S_n \text{ représente le nombre de boules blanches à l'issue du } n^e \text{ tirage}}$

• Comme X_k prend les valeurs 0 ou 1, l'ensemble des valeurs prises par S_n est $\boxed{[\![b, b+n]\!]}$

4 - a) Soit $k \in [\![b, n+b]\!]$. Sachant $S_n = k$, au moment du $(n+1)^e$ tirage, l'urne est composée de k boules blanches et $b+r+n$ boules au total donc :

$$\boxed{P(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k) = \frac{k}{b+r+n}}$$

5- D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(S_n = k)_{k \in [\![b, b+n]\!]}$, on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=b}^{b+n} P(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k)\, P(S_n = k)$$
$$= \frac{1}{b+r+n} \sum_{k=b}^{b+n} k\, P(S_n = k)$$

Donc $\boxed{P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{E(S_n)}{b+r+n}}$.

6- • Pour $n=1$, d'après 2, $X_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $X_k \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.
Alors $E(S_n) = b + \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = b + \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{b+r} = b + \frac{nb}{b+r} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}$.

Ainsi $P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{b+r+n} \frac{b(b+r+n)}{b+r} = \frac{b}{b+r}$.

Donc $X_{n+1} \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

• Donc, par récurrence forte :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)}$$

7- $(S_n = 1)$ signifie qu'aucune boule blanche n'a été rajoutée, c'est-à-dire que toutes les boules tirées sont rouges. Donc :

$$\boxed{(S_n = 1) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 0).}$$

8- D'après la formule des probabilités composées :

$$P(S_n = 1) = P(X_1 = 0)\, P(X_2 = 0 \mid X_1 = 0) \cdots P\left(X_n = 0 \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{n-1}(X_k = 0)\right)$$

Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$, sachant $\bigcap_{k=1}^{j} (X_k = 0)$, au moment du $(j+1)^e$ tirage, l'urne est composée d'une boule blanche et de $j+1$ boules rouges donc :

$$P\left(X_{j+1} = 0 \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{j}(X_k = 0)\right) = \frac{j+1}{j+2}.$$

Ainsi $P(S_n = 1) = \frac{1}{2} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \frac{j+1}{j+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n+1}$ par produit télescopique.

Donc $\boxed{P(S_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}}$.

9- Sachant $S_n = \ell$, au moment du $(n+1)^e$ tirage, l'urne est composée de ℓ boules blanches et de $n+2$ boules en tout.
Si on tire une boule blanche au $(n+1)^e$ tirage, on aura $S_{n+1} = \ell+1$ et si on tire une boule rouge on aura $S_{n+1} = \ell$.

Donc
$$\boxed{P(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \notin \{k-1, k\} \\ \frac{\ell}{n+2} & \text{si } \ell = k-1 \\ \frac{n+2-\ell}{n+2} & \text{si } \ell = k \end{cases}}$$

10- Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(S_n = \ell)_{\ell \in [\![1, n+1]\!]}$, on a :
$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{\ell=1}^{n+1} P(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell)\, P(S_n = \ell)$$

Donc
$$\boxed{P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).}$$

11- • Pour $n=1$, $S_n(\Omega) = [\![1, 2]\!]$, $P(S_n = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(S_n = 2) = \frac{1}{2}$

Donc $S_n \sim \mathcal{U}([\![1, n+1]\!])$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $S_n \sim \mathcal{U}([\![1, n+1]\!])$.

On a $S_{n+1}(\Omega) = [\![1, n+2]\!]$ et

• $P(S_{n+1} = 1) = P(S_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+2}$

• Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$, $P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1}$
$$= \frac{k-1+n+2-k}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+2}$$

Donc $S_{n+1} \sim \mathcal{U}([\![1, n+2]\!])$.

• Ainsi, par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n \sim \mathcal{U}([\![1, n+1]\!]).}$

Problème 2 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^{k+1}} S_k(n) = \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$

où $f : x \mapsto x^k$ est continue sur $[0,1]$. Donc, par sommes de Riemann :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{k+1}} S_k(n) = \int_0^1 x^k \, dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 .$$

Donc : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{k+1}} S_k(n) = \frac{1}{k+1}}$.

2- $\sum_{i=1}^{N} P(X \geq i) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=i}^{N} P(X=k)$ car $(X \geq i) = \bigcup_{k=i}^{N} (X=k)$ avec une union disjointe.

Or : $\begin{cases} 1 \leq i \leq N \\ i \leq k \leq N \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq i \leq k \\ 1 \leq k \leq N \end{cases}$

Donc $\sum_{i=1}^{N} P(X \geq i) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{k} P(X=k) = \sum_{k=1}^{N} P(X=k) \sum_{i=1}^{k} 1 = \sum_{k=1}^{N} k P(X=k)$

Donc : $\boxed{\sum_{i=1}^{N} P(X \geq i) = E(X)}$.

3- • $E(X_1) = \sum_{k=1}^{N} k P(X_1 = k) = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \frac{N(N+1)}{2}$ donc $\boxed{E(X_1) = \frac{N+1}{2}}$.

• $E(X_1^2) = \sum_{k=1}^{N} k^2 P(X=k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{1}{N} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ donc $\boxed{E(X_1^2) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}}$

• $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{(N+1)\left(2(2N+1) - 3(N+1)\right)}{12}$

Donc $\boxed{V(X_1) = \frac{(N+1)(N-1)}{12}}$

4-a) $(U_k \geq i) = (\min(X_1, \dots, X_k) \geq i) = \bigcap_{j=1}^{k} (X_j \geq i)$

Comme $X_1, \dots, X_k$ sont indépendantes :

$$P(U_k \geq i) = \prod_{j=1}^{k} P(X_j \geq i) = \prod_{j=1}^{k} \sum_{m=i}^{N} P(X_j = m) = \prod_{j=1}^{k} \frac{N-i+1}{N}$$

Donc $\boxed{P(U_k \geq i) = \left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k}$

b) • $E(U_\ell) = \sum_{i=1}^{N} P(U_\ell \geq i) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{N-i+1}{N}\right)^\ell$

$= \frac{1}{N^\ell} \sum_{i=1}^{N} (N-i+1)^\ell \underset{j=N-i+1}{=} \frac{1}{N^\ell} \sum_{j=1}^{N} j^\ell$

Donc $\boxed{E(U_\ell) = \frac{1}{N^\ell} S_\ell(N)}$

• On a : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\ell+1}} S_\ell(n) = \frac{1}{\ell+1}$ donc $S_\ell(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\ell+1}}{\ell+1}$.

Ainsi $E(U_\ell) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{N^\ell} \frac{N^{\ell+1}}{\ell+1}$, d'où $\boxed{E(U_\ell) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N}{\ell+1}}$.

5-a) • Soit $f : x \mapsto N+1-x$, on a : $(Y_1, .., Y_\ell) = (f(X_1), .., f(X_\ell))$

Donc, comme $X_1, .., X_\ell$ sont indépendantes, alors :

$\boxed{Y_1, .., Y_\ell \text{ sont indépendantes.}}$

• Soit $i \in [\![1, \ell]\!]$, $X_i(\Omega) = [\![1, N]\!]$ donc $Y_i(\Omega) = [\![1, N]\!]$.

Soit $j \in [\![1, N]\!]$,

$P(Y_i = j) = P(N+1-X_i = j) = P(X_i = N+1-j) = \frac{1}{N}$

Donc $\boxed{Y_i \sim \mathcal{U}([\![1, N]\!])}$

b) • $E(V_\ell) = E(\max(X_1, .., X_\ell))$

$= E(\max(Y_1, .., Y_\ell))$ car $\forall i \in [\![1, \ell]\!], X_i \sim Y_i$

$= E(\max(N+1-X_1, .., N+1-X_\ell))$

$= E(N+1-\min(X_1, .., X_\ell))$

$= N+1 - E(\min(X_1, .., X_\ell))$

Donc $\boxed{E(V_\ell) = N+1 - E(U_\ell).}$

• De même : $V(V_\ell) = V(N+1-U_\ell)$, donc $\boxed{V(V_\ell) = V(U_\ell).}$

6-a) $\sum_{i=1}^{N} (2i-1) P(X \geq i) = \sum_{i=1}^{N} (2i-1) \sum_{\ell=i}^{N} P(X=\ell) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\ell=i}^{N} (2i-1) P(X=\ell)$

Or : $\begin{cases} 1 \leq i \leq N \\ i \leq \ell \leq N \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq \ell \leq N \end{cases}$, donc :

$$\sum_{i=1}^{N}(2i-1)\,P(X\geq i) = \sum_{\ell=1}^{N}\sum_{i=1}^{\ell}(2i-1)\,P(X=\ell)$$
$$= \sum_{\ell=1}^{N}P(X=\ell)\sum_{i=1}^{\ell}(2i-1)$$
$$= \sum_{\ell=1}^{N}P(X=\ell)\left(2\cdot\frac{\ell(\ell+1)}{2}-\ell\right)$$
$$= \sum_{\ell=1}^{N}P(X=\ell)\,\ell^2.$$

Donc : $$\boxed{\sum_{i=1}^{N}(2i-1)\,P(X\geq i) = E(X^2)}$$

b) $$E(U_k^2) = \sum_{i=1}^{N}(2i-1)\,P(U_k\geq i) = \sum_{i=1}^{N}(2i-1)\left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k$$
$$= \frac{1}{N^k}\sum_{i=1}^{N}(2i-1)(N-i+1)^k$$
$$\underset{j=N-i+1}{=} \frac{1}{N^k}\sum_{j=1}^{N}\left(2(N-j+1)-1\right)j^k$$
$$= \frac{1}{N^k}\sum_{j=1}^{N}\left((2N+1)j^k-2j^{k+1}\right)$$
$$= \frac{2N+1}{N^k}\sum_{j=1}^{N}j^k - \frac{2}{N^k}\sum_{j=1}^{N}j^{k+1}$$

Donc $$\boxed{E(U_k^2) = \frac{2N+1}{N^k}S_k(N) - \frac{2}{N^k}S_{k+1}(N)}$$

c) $V(U_k) = E(U_k^2) - E(U_k)^2$ donc :
$$\boxed{V(U_k) = \frac{2N+1}{N^k}S_k(N) - \frac{2}{N^k}S_{k+1}(N) - \frac{1}{N^{2k}}S_k(N)^2}$$

d) On a : $$\frac{1}{N^2}V(U_k) = \frac{2N+1}{N}\cdot\frac{1}{N^{k+1}}S_k(N) - \frac{2}{N^{k+2}}S_{k+1}(N) - \left(\frac{1}{N^{k+1}}S_k(N)\right)^2$$

Or $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N^{k+1}}S_k(N) = \frac{1}{k+1}$ et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N^{k+2}}S_{k+1}(N) = \frac{1}{k+2}$.

Donc $$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N^2}V(U_k) = 2\cdot\frac{1}{k+1} - \frac{2}{k+2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{2(k+2)(k+1)-2(k+1)^2-(k+2)}{(k+2)(k+1)^2}$$
$$= \frac{k}{(k+2)(k+1)^2}$$

Donc $$\boxed{V(U_k) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{(k+2)(k+1)^2}N^2}$$