



Correction des exercices de rentrée MPSI-MP2I-PCSI

**Lycée Saint-Louis
2024-2025**

1 Calcul algébrique

1

Equations et inéquations diverses

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{b-a}{ab} \Leftrightarrow x = \frac{ab}{b-a}.$$

Ainsi l'équation a pour unique solution : $x = \frac{ab}{b-a}$.

2. (a) L'exponentielle étant définie sur \mathbb{R} , l'inéquation a un sens sur \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$, comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} , on a : $e^{2x-1} < e^{x^2} \Leftrightarrow 2x-1 < x^2$.

Donc :

$$e^{2x-1} < e^{x^2} \Leftrightarrow 0 < x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 0 < (x-1)^2.$$

Or, on a $(x-1)^2 \geq 0$ et $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Donc l'ensemble des solutions est : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(b) Le logarithme népérien est défini sur \mathbb{R}^{++} , l'inéquation a donc un sens si et seulement si $1-2x > 0$ et $x+2 > 0$ et $2x^2+x+3 > 0$.

Or, le discriminant associé à $2x^2+x+3=0$ est $\Delta = 1-24 = -23 < 0$ donc $2x^2+x+3$ est de signe constant sur \mathbb{R} et comme, pour $x=0$, $2x^2+x+3=3 > 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $2x^2+x+3 > 0$.

De plus $1-2x > 0$ et $x+2 > 0$ si et seulement si $-2 < x < \frac{1}{2}$.

Donc l'inéquation a un sens pour $x \in \left] -2, \frac{1}{2} \right[$.

Soit $x \in \left] -2, \frac{1}{2} \right[$, on a :

$$\ln(1-2x) + \ln(x+2) \geq \ln(2x^2+x+3) \Leftrightarrow \ln((1-2x)(x+2)) \geq \ln(2x^2+x+3) \Leftrightarrow \ln(-2x^2-3x+2) \geq \ln(2x^2+x+3).$$

Comme la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur \mathbb{R}^{++} , on a :

$$\ln(1-2x) + \ln(x+2) \geq \ln(2x^2+x+3) \Leftrightarrow -2x^2-3x+2 \geq 2x^2+x+3 \Leftrightarrow 0 \geq 4x^2+4x+1 \Leftrightarrow 0 \geq (2x+1)^2.$$

Or, on a toujours $(2x+1)^2 \geq 0$ et $(2x+1)^2 = 0$ si et seulement si $x = -\frac{1}{2}$.

Comme $-\frac{1}{2} \in \left] -2, \frac{1}{2} \right[$, l'inéquation a pour unique solution : $x = -\frac{1}{2}$.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|2x-5| < 13 \Leftrightarrow -13 < 2x-5 < 13 \Leftrightarrow -8 < 2x < 18 \Leftrightarrow -4 < x < 9.$$

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $] -4, 9[$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|3-4x| \geq 17 \Leftrightarrow 3-4x \geq 17 \text{ ou } 3-4x \leq -17 \Leftrightarrow -14 \geq 4x \text{ ou } 20 \leq 4x \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \geq x \text{ ou } 5 \leq x.$$

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $] -\infty, -\frac{7}{2}] \cup [5, +\infty[$.

4. (a) L'équation a un sens si et seulement si $2x^2+x+1 \geq 0$. Or le discriminant associé à $2x^2+x+1=0$ est $\Delta = 1-8 = -7 < 0$, donc $2x^2+x+1$ est de signe constant sur \mathbb{R} , comme pour $x=0$, $2x^2+x+1=1 \geq 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2+x+1 \geq 0$.

Donc l'équation a un sens sur \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < -1$, alors $x+1 < 0$, or $\sqrt{2x^2+x+1} \geq 0$, donc $\sqrt{2x^2+x+1} \neq x+1$.
- Si $x \geq -1$, alors $x+1 \geq 0$ et $\sqrt{2x^2+x+1} \geq 0$ donc :

$$\sqrt{2x^2+x+1} = x+1 \Leftrightarrow 2x^2+x+1 = (x+1)^2 \Leftrightarrow 2x^2+x+1 = x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=1.$$

Comme $0 \geq -1$ et $1 \geq -1$, les solutions de l'équation sont 0 et 1.

(b) L'équation a un sens si et seulement si $3x^2-4 \geq 0$ et $1-2x \geq 0$. Or $3x^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(x \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ou } x \leq -\frac{2}{\sqrt{3}} \right)$

et $1-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$. De plus $-\frac{2}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$, donc l'équation a un sens pour $x \in \left] -\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}} \right]$.

Soit $x \in \left] -\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}} \right]$, comme $\sqrt{3x^2-4} \geq 0$ et $\sqrt{1-2x} \geq 0$, on a :

$$\sqrt{3x^2-4} = \sqrt{1-2x} \Leftrightarrow 3x^2-4 = 1-2x \Leftrightarrow 3x^2+2x-5=0.$$

Or le discriminant associé à $3x^2 + 2x - 5 = 0$ est $\Delta = 4 + 60 = 64$, ses racines sont donc : $\frac{-2 \pm 8}{6}$, c'est-à-dire 1 et $-\frac{5}{3}$.
 Or $1 > -\frac{2}{\sqrt{3}}$ donc $x = 1$ n'est pas solution de l'équation. Et $-\frac{5}{3} \leq -\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{5}{3} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 5\sqrt{3} \geq 6 \Leftrightarrow 75 \geq 36$. Comme $75 \geq 36$, on a bien $-\frac{5}{3} \leq -\frac{2}{\sqrt{3}}$.
 Ainsi l'équation a pour unique solution $x = -\frac{5}{3}$.

5. Le discriminant associé à $x^2 + 2mx + 1 = 0$ est $\Delta = 4m^2 - 4 = 4(m^2 - 1)$.

- Si $m = \pm 1$, alors $\Delta = 0$, donc l'équation admet pour unique solution, $x = -m$.
- Si $m > 1$ ou $m < -1$, alors $\Delta > 0$, donc les solutions de l'équation sont $x = \frac{-2m + 2\sqrt{m^2 - 1}}{2} = -m + \sqrt{m^2 - 1}$ et $x = \frac{-2m - 2\sqrt{m^2 - 1}}{2} = -m - \sqrt{m^2 - 1}$.
- Si $-1 < m < 1$, alors $\Delta < 0$, donc l'équation n'admet pas de solution réelle.

2

Des inégalités

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

On a : $(x - y)^2 \geq 0$, ainsi $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$, d'où $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ce qui est le résultat demandé.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. En appliquant le résultat précédent à \sqrt{x} et $\frac{1}{\sqrt{x}}$, on a : $(\sqrt{x})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$, d'où $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
3. (a) En appliquant le résultat de la question 1. à \sqrt{a} et \sqrt{b} , on a : $(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 \geq 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, d'où $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.
 (b) On a : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ et, en raisonnant de même : $a + c \geq 2\sqrt{ac}$ et $b + c \geq 2\sqrt{bc}$. Toutes ces quantités étant positives, on obtient par produit : $(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8\sqrt{abacbc}$, d'où $(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc$.
 (c) En appliquant 1. à $\sqrt{a + b - c}$ et $\sqrt{a - b + c}$, on a : $2\sqrt{a + b - c}\sqrt{a - b + c} \leq (\sqrt{a + b - c})^2 + (\sqrt{a - b + c})^2$, ainsi $2\sqrt{a + b - c}\sqrt{a - b + c} \leq a + b - c + a - b + c$ donc $2\sqrt{a + b - c}\sqrt{a - b + c} \leq 2a$, d'où $\sqrt{a + b - c}\sqrt{a - b + c} \leq a$.
 (d) On a : $\sqrt{a + b - c}\sqrt{a - b + c} \leq a$ et, en raisonnant de même : $\sqrt{b + a - c}\sqrt{b - a + c} \leq b$ et $\sqrt{c + b - a}\sqrt{c - b + a} \leq c$.
 Toutes ces quantités étant positives, on obtient par produit :
 $\sqrt{a + b - c}\sqrt{a - b + c}\sqrt{b + a - c}\sqrt{b - a + c}\sqrt{c + b - a}\sqrt{c - b + a} \leq abc$. Donc $(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) \leq abc$, d'où $8(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) \leq 8abc$. Ainsi, d'après 3.b, $8(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) \leq (a + b)(a + c)(b + c)$.
4. (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$. On a : $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{xy} + y$. Or, d'après 3.(a), $2\sqrt{xy} \leq x + y$. Ainsi : $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq 2(x + y)$.
 (b) En appliquant le résultat précédent à $x = a + b - c$ et $y = b + c - a$, on a :
 $(\sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a})^2 \leq 2(a + b - c + b + c - a)$. Donc : $(\sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a})^2 \leq 4b$. Et comme la fonction racine carrée est croissante sur \mathbb{R}^+ , on a : $\sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a} \leq 2\sqrt{b}$.
 (c) On a : $\sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a} \leq 2\sqrt{b}$ et, en raisonnant de même : $\sqrt{b + a - c} + \sqrt{a + c - b} \leq 2\sqrt{a}$ et $\sqrt{a + c - b} + \sqrt{c + b - a} \leq 2\sqrt{c}$. Donc, en sommant ces trois inégalités : $2(\sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a} + \sqrt{a + c - b}) \leq 2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c}$. D'où : $\sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a} + \sqrt{a + c - b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.
5. (a) i. On a $\frac{1}{b} > 0$ donc $a - 1 < a - 1 + \frac{1}{b} < 0$, ainsi $a < 1$.
 De plus $a > 0$, donc $-1 + \frac{1}{b} < a - 1 + \frac{1}{b} < 0$ ainsi $\frac{1}{b} < 1$ donc $b > 1$.
 ii. On a $b - 1 > 0$ et $\frac{1}{c} > 0$ donc : $b - 1 + \frac{1}{c} > 0$.
 On a $a < 1$ donc $\frac{1}{a} - 1 > 0$ et $c > 0$, ainsi : $c - 1 + \frac{1}{a} > 0$.
 iii. Par produit : $\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) < 0$, donc : $\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$.
- (b) i. On a : $b - 1 + \frac{1}{c} = b\left(1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{bc}\right)$. Or $abc = 1$ donc : $\frac{1}{bc} = a$. Ainsi : $b - 1 + \frac{1}{c} = b\left(1 + a - \frac{1}{b}\right)$.
 ii. On a $\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) = b\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + a - \frac{1}{b}\right) = b\left(a + \left(\frac{1}{b} - 1\right)\right)\left(a - \left(\frac{1}{b} - 1\right)\right) = b\left(a^2 - \left(\frac{1}{b} - 1\right)^2\right) \leq ba^2$,
 car $\left(\frac{1}{b} - 1\right)^2 \geq 0$.
 iii. On a : $\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \leq ba^2$.
 De même, on a : $\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right)\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \leq ac^2$ et $\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq cb^2$.

Donc, par produit : $\left(\left(a-1 + \frac{1}{b} \right) \left(b-1 + \frac{1}{c} \right) \left(c-1 + \frac{1}{a} \right) \right)^2 \leq (abc)^3$.

Or $abc = 1$, donc : $\left(a-1 + \frac{1}{b} \right) \left(b-1 + \frac{1}{c} \right) \left(c-1 + \frac{1}{a} \right) \leq 1$.

(c) Si $a-1 + \frac{1}{b} < 0$ ou $b-1 + \frac{1}{c} < 0$ ou $c-1 + \frac{1}{a} < 0$, alors d'après 5.(a), on a la conclusion.

Sinon : $a-1 + \frac{1}{b} \geq 0$ et $b-1 + \frac{1}{c} \geq 0$ et $c-1 + \frac{1}{a} \geq 0$, donc, d'après 5.(b), on a la conclusion.

D'où, dans tous les cas : $\left(a-1 + \frac{1}{b} \right) \left(b-1 + \frac{1}{c} \right) \left(c-1 + \frac{1}{a} \right) \leq 1$.

3

Des valeurs absolues

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $u(x) = x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$. Donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = +\infty$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $u(x) = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$. Or, $\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0$. Donc $u(x) \geq \frac{3}{4}$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$, d'après la question précédente, on a $u(x) = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$. Donc $u(x) > \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0$.

D'où $\sqrt{u(x)} > \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2}$. Ainsi, $\sqrt{u(x)} > \left| x + \frac{1}{2} \right|$.

2. (a) D'après la question 1.b, on a $u(x) \geq \frac{3}{4} > 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 \neq 0$. Ainsi, l'ensemble de définition de f est \mathbb{R} .

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, d'après la question 1.c, on a $\sqrt{x^2 + x + 1} > \left| x + \frac{1}{2} \right|$. D'où $\sqrt{x^2 + x + 1} > \left| \frac{2x+1}{2} \right|$.

Donc $\sqrt{x^2 + x + 1} > \frac{|2x+1|}{2}$.

D'où $1 > \frac{|2x+1|}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$. Ainsi, $|f(x)| < 1$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$,

- Si $x \geq -\frac{1}{2}$, alors $2x+1 \geq 0$. De plus, $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4} > 0$ d'après la question 1.b. Donc par somme, on a : $2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1} > 0$.

- si $x < -\frac{1}{2}$ alors $2x+1 < 0$ donc $|2x+1| = -(2x+1)$. Or, d'après la question 1.c, on a $\frac{|2x+1|}{2} < \sqrt{x^2 + x + 1}$ d'où $-\frac{2x+1}{2} < \sqrt{x^2 + x + 1}$. Donc $-(2x+1) < 2\sqrt{x^2 + x + 1}$. Ainsi, $2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1} > 0$.

On a donc prouvé que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1} > 0$.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $|f(x) - 1| = \left| \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} - 1 \right| = \left| \frac{2x+1 - 2\sqrt{x^2 + x + 1}}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \right| = \left| \frac{(2x+1 - 2\sqrt{x^2 + x + 1})(2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1})}{2\sqrt{x^2 + x + 1}(2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1})} \right|$

$$= \left| \frac{(2x+1)^2 - 4(x^2 + x + 1)}{2\sqrt{x^2 + x + 1}(2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1})} \right| = \left| \frac{4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 - 4x - 4}{2\sqrt{x^2 + x + 1}(2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1})} \right|$$

$$= \left| \frac{-3}{2\sqrt{x^2 + x + 1}(2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1})} \right| = \frac{3}{|2\sqrt{x^2 + x + 1}(2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1})|}$$

Or, $\sqrt{x^2 + x + 1} > 0$ et d'après la question précédente, $2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1} > 0$.

Ainsi, $|f(x) - 1| = \frac{3}{2\sqrt{x^2 + x + 1}(2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1})}$

(b) Soit $x > 0$, $x^2 + x + 1 \geq 1$ donc $\sqrt{x^2 + x + 1} \geq 1$. Ainsi, $2\sqrt{x^2 + x + 1} \geq 2 \geq 1$.

De plus, $2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1} \geq 2x+1 \geq x > 0$ car $x+1 \geq 0$. D'où, par produit, $2\sqrt{x^2 + x + 1}(2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}) \geq x > 0$.

Par décroissance de la fonction inverse, on a : $\frac{1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}(2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1})} \leq \frac{1}{x}$. Donc $|f(x) - 1| \leq \frac{3}{x}$.

(c) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

4

Des racines carrées

1. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables.

Soit $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) + \sqrt{1+x} \left(-\frac{1}{2(\sqrt{x})^2 \sqrt{x}} \right) = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{x(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{1+x})^2}{2x\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$

$$= \frac{x(\sqrt{x}+1) - 1 - x}{2x\sqrt{x}\sqrt{1+x}} = \frac{x\sqrt{x} - 1}{2x\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$$

2. (a) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$ si et seulement si
- $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, x^3 - 1 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c \text{ si et seulement si } \begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 0 \\ -c = -1 \end{cases} \text{ si et seulement si } a = 1, b = 1$$

et $c = 1$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $X = \sqrt{x}$. On a $x\sqrt{x} - 1 = X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$.

Ainsi, $x\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)((\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)$. Donc $f'(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{2x\sqrt{x}\sqrt{x + 1}}$.

De plus, on a : $x\sqrt{x}\sqrt{x + 1} > 0$ et $x + \sqrt{x} + 1 > 0$. Enfin, $\sqrt{x} - 1 > 0$ si et seulement si $\sqrt{x} > 1$ si et seulement si $x > 1$ (car $x > 0$).

Ainsi, $f'(x) > 0$ si $x \in]1, +\infty[$ et $f'(x) < 0$ si $x \in]0, 1[$.

Donc f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]0, 1[$.

Ainsi, f admet un minimum en 1 valant $f(1) = 2\sqrt{2}$.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{a}{b} > 0$.

On a $f\left(\frac{a}{b}\right) = \sqrt{1 + \frac{a}{b}} \times \left(1 + \sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{b}} \left(1 + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{a+b} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$. Or, d'après la question précédente on a

pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 2\sqrt{2}$. Ainsi, $\sqrt{a+b} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \geq 2\sqrt{2}$. De plus, le minimum de f n'est atteint que pour $x = 1$.

Ainsi, l'égalité a lieu si et seulement si $\frac{a}{b} = 1$ c'est à dire si et seulement si $a = b$.

2 Suites et fonctions

1

Calcul intégral

- 1) a) La fonction $x \mapsto \sin x \cos x$ est de la forme $u'u$ si on note u la fonction sinus, donc admet $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{2}$ pour primitive.
- b) La fonction $x \mapsto xe^{-2x^2} = -\frac{1}{4} \times (-4x)e^{-2x^2}$ est à une constante multiplicative près de la forme $u'e^u$ si on note u la fonction $x \mapsto e^{-2x^2}$, donc admet $x \mapsto -\frac{1}{4}e^{-2x^2}$ pour primitive.
- c) La fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}$ est à une constante multiplicative près de la forme $\frac{u'}{u}$ si on note u la fonction strictement positive $x \mapsto x^2 + 1$, donc admet $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ pour primitive.
- d) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^3} = \frac{1}{x} \times (\ln x)^{-3}$ est de la forme $u'u^{-3}$ si on note u la fonction $x \mapsto \ln x$, donc admet $x \mapsto \frac{(\ln x)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2(\ln x)^2}$ pour primitive.
- e) La fonction $x \mapsto e^{x+e^x} = e^x e^{e^x}$ est de la forme $u'e^u$ si on note u la fonction $x \mapsto e^x$, donc admet $x \mapsto e^{e^x}$ pour primitive.
- f) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} = 2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}$ est à une constante multiplicative près de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc admet $x \mapsto 2\sqrt{1+\ln x}$ pour primitive.
- 2) a) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \left[\ln(1+x^3) \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{\ln 2}{3}$.
- b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{2+\cos t}} dt = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin t}{2\sqrt{2+\cos t}} dt = -2 \left[\sqrt{2+\cos t} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = -2(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$.

2

Etude d'un minimum

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. f_a est dérivable sur \mathbb{R} en tant que somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'_a(x) = e^{x-a} - 2.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$\begin{aligned} f'_a(x) > 0 &\iff e^{x-a} > 2 \\ &\iff e^x > 2e^a \\ &\iff x > \ln(2e^a) \\ &\iff x > \ln(2) + a \end{aligned}$$

Ainsi, f_a est strictement décroissante sur $] -\infty, \ln(2) + a]$ et strictement croissante sur $[\ln(2) + a, +\infty[$.
Donc, f_a admet un minimum en $a + \ln(2)$.

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $u_a = f_a(\ln(2) + a) = e^{\ln(2)+a-a} - 2(\ln(2) + a) + e^a = 2 - 2\ln(2) - 2a + e^a$. On définit alors sur \mathbb{R} la fonction g par $g(a) = 2 - 2\ln(2) - 2a + e^a$.
 g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $a \in \mathbb{R}$, $g'(a) = -2 + e^a$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $-2 + e^a > 0$ si et seulement si $a > \ln(2)$.
Donc g est strictement décroissante sur $] -\infty, \ln(2)]$ et strictement croissante sur $[\ln(2), +\infty[$. Ainsi, la fonction g admet un minimum en $\ln(2)$ et ce minimum vaut $g(2) = 2 - 2\ln(2) - 2\ln(2) + e^{\ln(2)} = 2 - 4\ln(2) + 2 = 4 - 4\ln(2)$.
Ainsi le minimum de f_a est minimum pour $a = \ln(2)$ et ce minimum vaut alors $4 - 4\ln(2)$.

3

Des suites et des récurrences

1. (a) • Pour $n = 0$, on a $v_0 = 1 \geq 0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $v_n \geq 0$.
On a $v_{n+1} = (n+1)v_n$, donc, comme $n+1 \geq 0$ et $v_n \geq 0$, on a $v_{n+1} \geq 0$.
On a donc prouvé par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} - v_n = (n+1)v_n - v_n = nv_n \geq 0$. Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- (c) • Pour $n = 0$, on a $v_0 = 1 \geq 0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $v_n \geq n$.
On a $v_{n+1} = (n+1)v_n$, ainsi :
– Si $n \geq 1$, comme $v_n \geq n \geq 1$, on a $v_{n+1} \geq n+1$.
– Si $n = 0$, comme $v_0 = 1 \geq 1$, on a $v_{n+1} \geq n+1$.
Dans tous les cas, on a $v_{n+1} \geq n+1$.
On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq n$.
- (d) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, on a, d'après le théorème de comparaison des limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- (e) • Pour $n = 1$, on a $v_1 = 1 \cdot v_0 = 1$.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $v_n = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$.
On a alors : $v_{n+1} = (n+1)v_n = v_n \times (n+1) = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n \times (n+1)$.
On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = \frac{nx^{n-1}e^{-x} + x^n(-e^{-x})}{n!} = \frac{nx^{n-1}e^{-x}}{n!} - \frac{x^n e^{-x}}{n!} = \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!} - \frac{x^n e^{-x}}{n!} = f_{n-1}(x) - f_n(x).$$

Donc : $f'_n = f_{n-1} - f_n$.

- (b) Comme f_n est une primitive de f'_n , on a : $\int_0^1 f'_n(x) dx = [f_n(x)]_0^1 = \frac{e^{-1}}{n!}$.
- (c) On a : $u_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - (-1) = 1 - e^{-1}$.
- (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $f'_n = f_{n-1} - f_n$, on a : $\int_0^1 f'_n(x) dx = \int_0^1 f_{n-1}(x) dx - \int_0^1 f_n(x) dx$.
Donc : $\frac{e^{-1}}{n!} = u_{n-1} - u_n$. Ainsi : $u_n = u_{n-1} - \frac{1}{en!}$.
- (e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\frac{1}{en!} \geq 0$, on a, d'après la question précédente : $u_n \leq u_{n-1}$.
Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- (f) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on a : $\frac{x^n e^{-x}}{n!} \geq 0$, donc $\int_0^1 \frac{e^{-x} x^n}{n!} dx \geq 0$.
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
- (g) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle est donc convergente.
- (h) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, comme $0 \leq x^n \leq 1$ et $0 \leq e^{-x} \leq 1$, on a : $\frac{x^n e^{-x}}{n!} \leq \frac{1}{n!}$. Donc, comme $\int_0^1 \frac{1}{n!} dx = \frac{1}{n!}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \frac{1}{n!}$.
- (i) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n!}$.
Or d'après 1., $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4

Encore des suites et des récurrences

1. • Pour $n = 1$, f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = 3^1 x e^{3x} + n 3^{n-1} e^{3x}$.
 • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = 3^n x e^{3x} + n 3^{n-1} e^{3x}$.
 Alors $f^{(n)}$ est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = 3^n e^{3x} + 3^{n+1} x e^{3x} + n 3^n e^{3x} = 3^{n+1} x e^{3x} + (n+1) 3^n e^{3x}.$$

On a donc prouvé par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = 3^n x e^{3x} + n 3^{n-1} e^{3x}$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = (3x+1)e^{3x}$. Ainsi $f'(x)$ est du signe de $3x+1$.
 Donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.
 (b) On a : $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}e^{-1}$. Or $e^{-1} < 1$, donc $-\frac{1}{3}e^{-1} > -\frac{1}{3}$, ainsi : $f\left(-\frac{1}{3}\right) > -\frac{1}{3}$.

3. Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 0.

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = 0$. Alors $u_{n+1} = f(0) = 0$.

On a donc prouvé par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 0.

4. Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue sur \mathbb{R} , alors, on a $f(l) = l$, c'est-à-dire $le^{3l} = l$. Donc $l(e^{3l} - 1) = 0$. Ainsi $l = 0$ ou $e^{3l} = 1$. Donc : $l = 0$.

5. (a) • Pour $n = 0$, on a $u_0 \in]0, +\infty[$.
 • Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in]0, +\infty[$. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$. Or f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc $u_{n+1} > f(0)$. Comme $f(0) = 0$, on a $u_{n+1} \in]0, +\infty[$.
 On a donc prouvé par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, +\infty[$.
 (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} - u_n = u_n e^{3u_n} - u_n = u_n(e^{3u_n} - 1)$. Or $u_n \geq 0$, ainsi $e^{3u_n} - 1 \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $n \geq 0$, on a : $u_n \geq u_0$.
 (d) Supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ majorée, alors, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ et d'après 4., on a $l = 0$.
 Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$, donc, par passage à la limite $l \geq u_0$ donc $0 \geq u_0$ ce qui est absurde.
 Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, et comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

6. On suppose dans cette question que $u_0 \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.

- (a) • Pour $n = 0$, on a $u_0 \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
 • Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$. Or f est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{3}, 0\right[$, donc $u_{n+1} \in \left[f\left(-\frac{1}{3}\right), f(0)\right]$. Comme $f(0) = 0$ et $f\left(-\frac{1}{3}\right) > -\frac{1}{3}$, on a $u_{n+1} \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
 On a donc prouvé par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
 (b) Soit $x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$. On a $f(x) - x = xe^{3x} - x = x(e^{3x} - 1)$. Or $x < 0$ et $e^{3x} - 1 < 0$, donc $f(x) - x \geq 0$.
 (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ d'après la question précédente, car $u_n \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
 Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 (d) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 0, elle est donc convergente vers $l \in \mathbb{R}$. D'après 4., on a $l = 0$, donc :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

7. (a) Comme f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$, alors $u_1 \in \left]f\left(-\frac{1}{3}\right), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right]$. Or $f\left(-\frac{1}{3}\right) > -\frac{1}{3}$ et
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Donc $u_1 \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.

- (b) La suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$ vérifie les hypothèses de la question 6. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, donc
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- 1) a) La fonction $x \mapsto x+4$ est dérivable sur \mathbb{R}_+ et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* , et la fonction logarithme est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , donc ϕ est dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \geq 0$: $\phi'(x) = \frac{1}{x+4} - 1 = -\frac{x+3}{x+4} < 0$. Il en découle que ϕ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ .
- b) Pour tout $x \geq 0$: $\phi(x) = x \left(\frac{\ln(x+4)}{x+4} \times \frac{x+4}{x} - 1 \right)$, donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = (+\infty) \times (0 \times 1 - 1) = -\infty$. Par ailleurs : $\phi(0) = \ln 4 > \ln 1 = 0$. En outre, ϕ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ d'après a) et elle y est continue car dérivable, donc s'y annule une et une seule fois d'après la version strictement monotone du théorème des valeurs intermédiaires.
- c) Comme ϕ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ d'après a) et : $\phi(\alpha) = 0$, il nous suffit de montrer que : $\phi(4) < 0$. Or : $\phi(4) = \ln 8 - 4 = \ln(2^3) - 4 = 3 \ln 2 - 4 < 3 \ln e - 4 = -1 < 0$.

2) Pour tout $x \geq 0$: $x+4 \geq 1$, donc : $f(x) = \ln(x+4) \geq \ln 1 = 0$.

- 3) a) Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \alpha$. Nous allons le montrer par récurrence.

Initialisation : Par définition de α : $u_0 = 0 \leq \alpha$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose : $u_n \leq \alpha$. Or la fonction f est croissante sur \mathbb{R}_+ par composition des fonctions croissantes $x \mapsto x+4$ et $x \mapsto \ln x$, donc : $f(u_n) \leq f(\alpha)$, i.e. comme voulu : $u_{n+1} \leq \alpha$.

- b) Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq u_{n+1}$. Nous allons le montrer par récurrence.

Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = \ln 4 \geq \ln 1 = 0 = u_0$, donc : $u_0 \leq u_1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose : $u_n \leq u_{n+1}$. Or f est croissante sur \mathbb{R}_+ , donc : $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, i.e. comme voulu : $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

- c) Croissante majorée d'après a) et b), la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente d'après le théorème de la limite monotone, disons de limite ℓ . A priori, rien ne garantit que : $\ell = \alpha$, car nous avons seulement montré que α est un minorant de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — parmi d'autres. Cela dit, la fonction f est continue en ℓ , donc : $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$, donc si nous faisons tendre n vers $+\infty$ dans la relation : $u_{n+1} = f(u_n)$ qui est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient : $f(\ell) = \ell$. Conclusion : $\ell = \alpha$ d'après le résultat d'unicité de 2)a).

- 3) a) Pour tout $x \geq 0$: $f'(x) = \frac{1}{x+4}$, donc en effet : $f'(x) \in \left[0, \frac{1}{4} \right]$.

- b) Soient $x, y \geq 0$. Comme le résultat demandé ne dépend pas de l'ordre dans lequel x et y sont rangés, on peut supposer sans perte de généralité que : $y \leq x$. Ainsi, d'après a) : $\int_y^x 0 dt \leq \int_y^x f'(t) dt \leq \int_y^x \frac{1}{4} dt$ par croissance de l'intégrale, donc d'après le théorème fondamental du calcul intégral : $0 \leq f(x) - f(y) \leq \frac{x-y}{4}$, et donc : $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4} |x - y|$.

- c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons : $x = u_n$ et $y = \alpha$ dans b), cela donne : $|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.

- d) **Initialisation :** D'après 1)c) : $|u_0 - \alpha| = \alpha \leq 4 = \frac{1}{2^{-2}} = \frac{1}{2^{2(0-1)}}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{2(n-1)}}$. D'après c) :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha| \stackrel{\text{HDR}}{\leq} \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^{2(n-1)}} = \frac{1}{2^{2n}}.$$

- e) D'après d), il nous suffit de trouver une valeur de n pour laquelle : $\frac{1}{2^{2(n-1)}} < 10^{-3}$, i.e. : $2^{2(n-1)} > 1000$. Or la première puissance de 2 qui dépasse 1000 est 2^{10} comme on le vérifie aisément à la main : $2^{10} = 1024$. Pour $n = 6$, on a donc bien : $2^{2(n-1)} = 2^{10} > 1000$. Conclusion : u_6 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

6

Des études de fonctions

Première partie : Etude de fonctions auxiliaires

1. (a) On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$, donc, par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x-1}} = 0$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 1^+} -(x-1) \ln(x-1) = 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2$, on a : $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$.

- (b) La fonction \ln est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} donc, par composée et produit, g est dérivable sur $]1, +\infty[$.
Soit $x \in]1, +\infty[$. On a :

$$g'(x) = 2 - \ln(x-1) - \frac{x-1}{x-1} = 1 - \ln(x-1).$$

- (c) Soit $x \in]1, +\infty[$, on a : $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x-1) > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln(x-1) \Leftrightarrow e > x-1 \Leftrightarrow x < e+1$.
Ainsi g est strictement croissante sur $]1, e+1[$ et strictement décroissante sur $]e+1, +\infty[$.
- (d) La fonction g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[e+1, e^3+1]$. De plus $g(e+1) = 2(e+1) - e \ln(e) = e+2 > 0$ et $g(e^3+1) = 2(e^3+1) - e^3 \ln(e^3) = 2 - e^3 < 0$ donc $0 \in [g(e^3+1), g(e+1)]$.
Ainsi l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[e+1, e^3+1]$.
Comme g est strictement décroissante sur $[e+1, +\infty[$ et que $g(\alpha) = 0$, alors : $g > 0$ sur $[e+1, \alpha[$ et $g < 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.
De plus, g est strictement croissante sur $]1, e+1[$ et $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2 > 0$, donc $g > 0$ sur $]1, e+1[$.
Ainsi : $g > 0$ sur $]1, \alpha[$ et $g < 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.

2. (a) On a $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x^2 - 1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$, donc, par quotient : $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = -\infty$.

$$\text{Soit } x \in]1, +\infty[, \text{ on a : } \varphi(x) = \frac{\ln\left(x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} = \frac{2\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x} = 2\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x}.$$

$$\text{Or on sait que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

$$\text{De plus } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \text{ donc, par quotient, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0.$$

$$\text{Ainsi, par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.$$

- (b) La fonction \ln est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} et, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $x^2 - 1 \in \mathbb{R}^{+*}$, donc par composée et par quotient, φ est dérivable sur $]1, +\infty[$.
Soit $x \in]1, +\infty[$, on a :

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2-1}x - \ln(x^2-1)}{x^2} = \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}.$$

Or, $x^2(x^2-1) > 0$ donc $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$.

- (c) • Soit $x \in]1, \sqrt{\alpha}[$, alors $x^2 \in]1, \alpha[$ donc $g(x^2) \geq 0$, ainsi φ est croissante sur l'intervalle $]1, \sqrt{\alpha}[$.
• Soit $x \in]\sqrt{\alpha}, +\infty[$, alors $x^2 \in]\alpha, +\infty[$ donc $g(x^2) \leq 0$, ainsi φ est décroissante sur l'intervalle $]\sqrt{\alpha}, +\infty[$.

Deuxième partie : Etude de la fonction f

1. Soit $x \in]0, +\infty[$, $\varphi(e^x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x} = f(x)$.

2. (a) On a $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = -\infty$, donc, par composition : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.

(b) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$, donc, par composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- (c) • Soit $x \in]1, \ln(\sqrt{\alpha})[$, alors $e^x \in]1, \sqrt{\alpha}[$. Or \exp est croissante sur $]1, \ln(\sqrt{\alpha})[$ et φ est croissante sur $]1, \sqrt{\alpha}[$, donc, par composition, f est croissante sur $]1, \ln(\sqrt{\alpha})[$.
• Soit $x \in]\ln(\sqrt{\alpha}), +\infty[$, alors $e^x \in]\sqrt{\alpha}, +\infty[$. Or \exp est croissante sur $]\ln(\sqrt{\alpha}), +\infty[$ et φ est décroissante sur $]\sqrt{\alpha}, +\infty[$, donc, par composition, f est décroissante sur $]\ln(\sqrt{\alpha}), +\infty[$.

Ainsi f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.

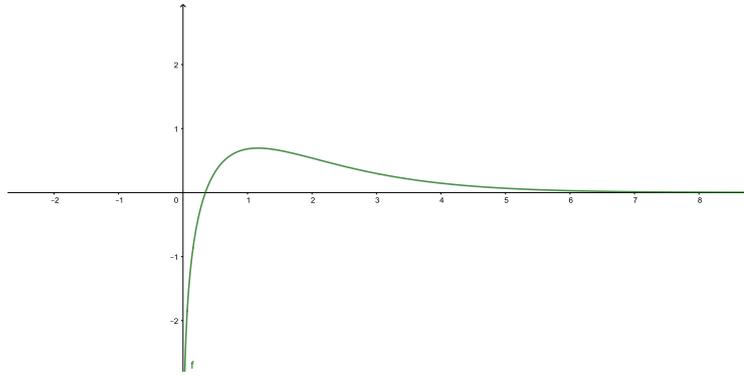
3. Soit $x \in]0, +\infty[$, on a : $f(x) \leq f(\ln(\sqrt{\alpha}))$. Or $f(\ln(\sqrt{\alpha})) = \frac{\ln(e^{2\ln(\sqrt{\alpha})} - 1)}{e^{\ln(\sqrt{\alpha})}} = \frac{\ln(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}}$.

$$\text{Or } g(\alpha) = 0 \text{ donc } (\alpha - 1)\ln(\alpha - 1) = 2\alpha, \text{ ainsi } \ln(\alpha - 1) = \frac{2\alpha}{\alpha - 1}.$$

$$\text{Donc : } f(\ln(\sqrt{\alpha})) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha - 1)} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}.$$

$$\text{D'où : } f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}.$$

4.



Troisième partie : Recherche de primitives de f

1. Soit $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$f'(x) + f(x) = \frac{\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}e^x - \ln(e^{2x}-1)e^x}{e^{2x}} + \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x} = \frac{\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}e^x}{e^{2x}} = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}.$$

De plus : $\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)} = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}.$

Donc : $f'(x) + f(x) = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}.$

2. Une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x-1}$ est $x \mapsto \ln(e^x-1)$.

Une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$ est $x \mapsto \ln(e^x+1)$. Donc, une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$ est $x \mapsto \ln(e^x-1) - \ln(e^x+1)$, c'est-à-dire $x \mapsto \ln \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

3. Soit $x \in]0, +\infty[$, on a $f(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1} - f'(x)$. Or une primitive de f' est f . Donc : $x \mapsto \ln \frac{e^x-1}{e^x+1} - f(x)$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Ainsi les primitives de f sur $]0, +\infty[$ sont : $x \mapsto \ln \frac{e^x-1}{e^x+1} - f(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

7

Etude de fonctions avec un paramètre

Par définition : $f(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-p} = x \ln x - x \ln p + (1-x) \ln(1-x) - (1-x) \ln(1-p).$

1) a) La quantité $f(x)$ est bien définie si $\ln x$ et $\ln(1-x)$ sont bien définis, autrement dit si : $x > 0$ et $1-x > 0$.
Conclusion : $D =]0, 1[$.

b) La fonction $x \mapsto 1-x$ est dérivable sur $]0, 1[$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et la fonction logarithme est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , donc par composition, $x \mapsto \ln(1-x)$ est dérivable sur $]0, 1[$. Ensuite, les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto 1-x$ sont dérivables sur $]0, 1[$, donc par somme, produit et multiplication par un réel, f est dérivable sur $]0, 1[$. Ensuite, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - \ln p + (-1) \times \ln(1-x) + (1-x) \times \frac{-1}{1-x} - (-1) \ln(1-p) \\ &= \ln x + 1 - \ln p - \ln(1-x) - 1 + \ln(1-p) = \ln x - \ln(1-x) - \ln p + \ln(1-p). \end{aligned}$$

c) D'après cette expression de f' trouvée en **b)** et les arguments avancés pour la dérivabilité de f , la fonction f' est dérivable sur $]0, 1[$ et pour tout $x \in]0, 1[$: $f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)}$.

d) Pour tout $x \in]0, 1[$: $f'(x) = 0 \iff \ln x - \ln(1-x) - \ln p + \ln(1-p) = 0 \iff \ln \frac{x}{1-x} = \ln \frac{p}{1-p}$
 $\iff \frac{x}{1-x} = \frac{p}{1-p} \iff (1-p)x = p(1-x) \iff x = p.$

e) La fonction f'' est strictement positive sur $]0, 1[$ (d'après **c)**), donc f' y est strictement croissante. D'après **d)**, f' est donc strictement négative sur $]0, p[$ et strictement positive sur $]p, 1[$, donc f est strictement décroissante sur $]0, p[$ et strictement croissante sur $]p, 1[$. Ces variations montrent que f est minimale en p . Son minimum vaut : $f(p) = p \ln \frac{p}{p} + (1-p) \ln \frac{1-p}{1-p} = 0$. Ce résultat montre comme voulu que f est positive ou nulle sur $]0, 1[$.

- 2) a) La tangente de la fonction logarithme en 1 a pour équation : $y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1 = x-1$.
- b) Notons δ la fonction $x \mapsto \ln x - x$ sur \mathbb{R}_+^* . Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R}_+^* par différence et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
 $\delta'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. La fonction δ' est ainsi positive ou nulle sur $]0, 1[$ et négative ou nulle sur $[1, +\infty[$, donc δ est croissante sur $]0, 1[$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. Comme : $\delta(1) = -1$, ces variations montrent que δ est majorée par -1 sur \mathbb{R}_+^* , i.e. que pour tout $x > 0$: $\ln x \leq x-1$. Graphiquement, cela revient à dire que le graphe de la fonction logarithme est toujours situé sous sa tangente en 1, ce qui se visualise assez bien!
- c) Pour tout $x > 0$: $\sqrt{x} > 0$, donc d'après b) : $\ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x} - 1$, donc d'après les propriétés du logarithme : $\ln x \leq 2(\sqrt{x} - 1)$.
- d) Pour tout $x \geq 1$: $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{x} (\sqrt{x} - 1) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$, or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \right) = 0$, donc par encadrement :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Composons ensuite cette limite avec la limite : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$, ce qui revient à poser : $x = \frac{1}{t}$.
Il vient : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = 0$, i.e. : $\lim_{t \rightarrow 0} t \ln t = 0$.
- e) D'après d) : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$. Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0$, donc par composition : $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \ln(1-x) = 0$.
Or pour tout $x \in]0, 1[$: $f(x) = x \ln x - x \ln p + (1-x) \ln(1-x) - (1-x) \ln(1-p)$, donc d'une part : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\ln(1-p)$ et d'autre part : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\ln p$.

3 Nombres complexes (pour les élèves ayant suivi l'option mathématiques expertes)

1

Cercle trigonométrique

- 1) On a : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$;
 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$; $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;
 $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$;
- 2) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ et $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
- 3) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \iff x = \frac{\pi}{2} [\pi]$.
- b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.
- c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.
- d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{ix} = -i \iff e^{ix} = e^{-\frac{i\pi}{2}} \iff x = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.
- e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{ix} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \iff e^{ix} = e^{\frac{3i\pi}{4}} \iff x = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$.
- 4) a) $i = 1 \times e^{\frac{i\pi}{2}}$, donc : $|i| = 1$ et $\frac{\pi}{2}$ est un argument de i .
- b) $|1+i| = \sqrt{2}$, donc : $1+i = \sqrt{2} \times \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \times e^{\frac{i\pi}{4}}$, donc $\frac{\pi}{4}$ est un argument de $1+i$.
- c) $-4 = 4 \times e^{i\pi}$, donc : $|-4| = 4$ et π est un argument de -4 .
- d) $|\sqrt{3}+3i| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, donc : $\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3} \times e^{\frac{i\pi}{3}}$, donc $\frac{\pi}{3}$ est un argument de $\sqrt{3}+3i$.
- e) Nous avons déjà calculé le module et un argument de i et $1+i$. Par quotient : $\left| \frac{i}{1+i} \right| = \frac{|i|}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$
est un argument de $\frac{i}{1+i}$.

1) Le calcul du module ne requiert pas qu'on ait calculé avant la forme algébrique :

$$\left| \frac{(2-i)(1+3i)}{3+4i} \right| = \frac{|2-i| \times |1+3i|}{|3+4i|} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}{5} = \sqrt{2}.$$

Pour la forme algébrique : $\frac{(2-i)(1+3i)}{3+4i} = \frac{(5+5i)}{3+4i} = \frac{(5+5i)(3-4i)}{25} = \frac{(1+i)(3-4i)}{5} = \frac{7-i}{5}.$

2) a) On travaille par équivalence. Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{z+2}{z-i}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{(z+2)(\bar{z}+i)}{|z-i|^2}\right) = \frac{\operatorname{Re}\left((z+2)(\bar{z}+i)\right)}{|z-i|^2} && \text{car : } |z-i|^2 \in \mathbb{R} \\ &= \frac{\operatorname{Re}\left(|z|^2 + iz + 2\bar{z} + 2i\right)}{|z-i|^2} = \frac{x^2 + y^2 - y + 2x}{|z-i|^2} && \text{car : } z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Aussitôt : } \frac{z+2}{z-i} \in i\mathbb{R} &\iff \operatorname{Re}\left(\frac{z+2}{z-i}\right) = 0 &\iff x^2 + y^2 - y + 2x = 0 \\ &\iff (x+1)^2 - 1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 && \text{après mise sous forme canonique} \\ &\iff (x+1)^2 - 1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} &\iff \left|z + 1 - \frac{i}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est ainsi un cercle, en l'occurrence le cercle de centre le point d'affixe $-1 + \frac{i}{2}$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

b) Première réponse : L'équation étudiée s'écrit aussi : $|z+2| = |z-i|$ et caractérise l'ensemble des points d'affixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ à égale distance des points A d'affixe -2 et B d'affixe i . Cet ensemble est en d'autres termes la médiatrice du segment $[AB]$, qui passe par le milieu de $[AB]$ d'affixe $\frac{-2+i}{2} = -1 + \frac{i}{2}$, et admet le vecteur \vec{AB} d'affixe $i - (-2) = 2 + i$ pour vecteur normal.

Deuxième réponse : On travaille par équivalence. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$:

$$\left| \frac{z+2}{z-i} \right| = 1 \iff |z+2|^2 = |z-i|^2 \iff (x+2)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \iff 4x + 2y + 3 = 0.$$

L'ensemble cherché est ainsi une droite. Conformément à notre première réponse, cette droite passe par le point de coordonnées $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, i.e. d'affixe $-1 + \frac{i}{2}$, et admet le vecteur de coordonnées $(4, 2)$ pour vecteur normal, mais donc aussi le vecteur de coordonnées $(2, 1)$, i.e. d'affixe $2 + i$.

$$\begin{aligned} 3) \text{ Pour tout } \theta \in \mathbb{R} : \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{(1+e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^2} = \frac{1+e^{i\theta}-e^{-i\theta}-1}{|(1-\cos\theta)-i\sin\theta|^2} && \text{car : } e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1 \\ &= \frac{2i\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} && \text{car : } e^{i\theta} - e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta - i\sin\theta) = 2i\sin\theta \\ &= \frac{2i\sin\theta}{2-2\cos\theta} && \text{car : } \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \\ &= i \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}, && \text{ce qui montre bien que } \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \text{ est imaginaire pur.} \end{aligned}$$

Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{12}$

1. (a) On a $|z| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2$. Ainsi, $z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

(b) D'après la question précédente, on a : $z^n = 2^n e^{in\frac{\pi}{6}}$.

Ainsi, z^n est un imaginaire pure si et seulement si $n\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}[\pi]$. Ainsi, z^n est un imaginaire pure si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ si et seulement si $n = 3 + 6k$.

2. (a) On a $|u_1^2| = |z|$. Donc $|u_1^2| = 2$. D'où $|u_1| = \sqrt{2}$. On montre de même que $|u_2| = \sqrt{2}$.

(b) On a $\arg(u_1^2) = 2 \arg(u_1) [2\pi]$. De plus, $u_1^2 = z$ donc $2 \arg(u_1) = \arg(z) [2\pi]$. D'après la question 1, $2 \arg(u_1) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

Donc $\arg(u_1) = \frac{\pi}{12} [\pi]$.

On montre de même que $\arg(u_2) = \frac{\pi}{12} [\pi]$. Ainsi, un argument de u_1 est $\frac{\pi}{12}$ ou $\frac{\pi}{12} + \pi$. Or, la partie réelle de u_1 est positive donc $\arg(u_1) = \frac{\pi}{12} [2\pi]$.

De même, un argument de u_2 est $\frac{\pi}{12}$ ou $\frac{\pi}{12} + \pi$. Or, la partie réelle de u_2 est négative donc $\arg(u_2) = \frac{13\pi}{12} [2\pi]$.

3. On a $u_1^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Or, $u_1^2 = z = \sqrt{3} + i$. Ainsi, $x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(u_1^2) = \operatorname{Re}(z) = \sqrt{3}$ et $2xy = \operatorname{Im}(u_1^2) = \operatorname{Im}(z) = 1$. De plus, comme $u_1^2 = z$, on a $|u_1|^2 = |z|$. Or, $|u_1|^2 = x^2 + y^2$. Donc $x^2 + y^2 = |z| = 2$.

En additionnant la première et la dernière équation, on a : $2x^2 = 2 + \sqrt{3}$. D'où $x^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, $x = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$. De plus, $x = \operatorname{Re}(u_1) \geq 0$. Donc $x = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$.

Cette écriture se simplifie en : $x = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2^2}} = \frac{|1 + \sqrt{3}|}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

En soustrayant la dernière et la première équation, on a : $2y^2 = 2 - \sqrt{3}$. D'où $y^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, $y = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$ ou $y = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$. Or, $2xy = 1$ donc x et y sont de même signe. Ainsi, $y = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$.

De même, l'expression de y se simplifie en $y = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{(1 - \sqrt{3})^2}{2^2}} = \frac{|1 - \sqrt{3}|}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

4. On a $u_1 = x + iy$. De plus, d'après la question 2, on a $u_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. En identifiant les parties réelles, on a : $x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. De même, en identifiant les parties imaginaires, on a : $y = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Donc $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

4

Nombres complexes et géométrie

1. On a :

$$M' = M \Leftrightarrow z = z' \Leftrightarrow \frac{3iz - 1}{z + 3i} = z \Leftrightarrow 3iz - 1 = z(z + 3i) \Leftrightarrow 3iz - 1 = z^2 + 3iz \Leftrightarrow -1 = z^2 \Leftrightarrow z = \pm i.$$

Ainsi les points M tels que $M' = M$ sont les points d'affixe i et $-i$.

2. Soient $z \neq i$ et $z \neq -3i$, on a :

$$\frac{z' + i}{z' - i} = \frac{\frac{3iz - 1}{z + 3i} + i}{\frac{3iz - 1}{z + 3i} - i} = \frac{3iz - 1 + (z + 3i)i}{3iz - 1 - (z + 3i)i} = \frac{3iz - 1 + iz - 3}{3iz - 1 - iz + 3} = \frac{4iz - 4}{2iz + 2} = \frac{4i(z + i)}{2i(z - i)} = 2 \frac{z + i}{z - i}.$$

3. (a) Soit M un point différent de B d'affixe $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{MB}{MA} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{|z+i|}{|z-i|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4|z+i|^2 = |z-i|^2 \Leftrightarrow 4|x+i(y+1)|^2 = |x+i(y-1)|^2 \Leftrightarrow 4(x^2 + (y+1)^2) = x^2 + (y-1)^2 \\ &\Leftrightarrow 4(x^2 + y^2 + 2y + 1) = x^2 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 10y + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{10}{3}y + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi Π est le cercle de centre le point de coordonnées $(0, -\frac{5}{3})$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

On a : $\frac{CB}{CA} = \frac{|-i + 3i|}{|i + 3i|} = \frac{|2i|}{|4i|} = \frac{1}{2}$. Donc $C \in \Pi$.

(b) Supposons que M , d'affixe z , appartienne à $\Pi \setminus \{C\}$. Soit z' l'affixe de M' .

Comme $M \in \Pi$, on a $\frac{|z+i|}{|z-i|} = \frac{1}{2}$, or, d'après 2., $\frac{z+i}{z-i} = \frac{1}{2} \frac{z'+i}{z'-i}$, ainsi $\frac{|z'+i|}{|z'-i|} = 1$, donc $|z'+i| = |z'-i|$.

Posons $z' = x' + iy'$ avec $x', y' \in \mathbb{R}$, alors $|x' + i(y'+1)|^2 = |x' + i(y'-1)|^2$ d'où : $x'^2 + (y'+1)^2 = x'^2 + (y'-1)^2$ donc : $x'^2 + y'^2 + 2y' + 1 = x'^2 + y'^2 - 2y' + 1$ donc $y' = 0$.

Ainsi M' appartient à l'axe des abscisses.

On aurait pu également remarquer que, comme $|z'+i| = |z'-i|$, M' est équidistant des points d'affixes $-i$ et i donc appartient à la médiatrice du segment formé par ces points qui est bien l'axe des abscisses.

Sommes géométriques

- 1) a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left((\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta) \right) = \cos\theta$
 et de même : $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left((\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta - i\sin\theta) \right) = \sin\theta$.
- b) Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$: $2ie^{\frac{i\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \stackrel{\text{a)}}{=} 2ie^{\frac{i\theta}{2}} \times \frac{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}}{2i} = e^{\frac{i\theta}{2}} \left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}} \right) = e^{i\theta} - 1$.
- 2) a) Le nombre S est une somme de puissances consécutives de e^{2ix} . Par ailleurs, x n'étant pas un multiple entier de π : $e^{2ix} \neq 1$ d'après le cercle trigonométrique. Nous savons qu'alors : $S = \frac{(e^{2ix})^{n+1} - 1}{e^{2ix} - 1} = \frac{e^{2i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$, où $n+1$ est le nombre de termes sommés.
- b) $S = \frac{e^{2i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \stackrel{\text{1)b)}}{=} \frac{2ie^{i(n+1)x} \sin(nx)}{2ie^{ix} \sin x} = e^{inx} \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x}$.
- c) La partie réelle de S vaut par définition : $\operatorname{Re}(S) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{2ikx} \right) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{2ikx}) = \sum_{k=0}^n \cos(2kx)$, mais elle vaut aussi d'après b) : $\operatorname{Re}(S) = \operatorname{Re} \left(e^{inx} \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x} \right) = \operatorname{Re}(e^{inx}) \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x} \cos(nx)$.