Contre-exemples : suites numériques

Contre-exemple 1 :

Une suite (u_n) telle que $\lim u_n = 0$ soit vrai et $\lim \frac{1}{u_n} = \pm\infty$ soit faux.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{(-1)^n.n}$.
On a : $\lim |u_n| = \lim \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim u_n = 0$.
On a également : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{u_n} = (-1)^n.n$. Ainsi $\lim u_{2n} = +\infty$ et $\lim u_{2n+1} = -\infty$ donc $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ n'a pas de limite.

Contre-exemple 2 :

Deux suites (u_n) et (v_n) convergentes telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$ soit vrai et $\lim u_n < \lim v_n$ soit faux.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < v_n$ et $\lim u_n = 1 = \lim v_n$.

Contre-exemple 3 :

Deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim u_n = \lim v_n$ soit vrai et $\lim(u_n - v_n) = 0$ soit faux.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$ et $v_n = n^2$.
On a : $\lim u_n = \lim v_n = +\infty$ et $\lim(u_n - v_n) = \lim(n - n^2) = -\infty$.

Contre-exemple 4 :

Deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim(u_n - v_n) = 0$ soit vrai et $\lim u_n = \lim v_n$ soit faux.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos^2(n) - 1$ et $v_n = -\sin^2(n)$.
On a : $\lim(u_n - v_n) = \lim(\cos^2(n) + \sin^2(n) - 1) = 0$ et ni (u_n) ni (v_n) n'admet de limite.

Contre-exemple 5 :

Deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim(u_n - v_n) = 0$ soit vrai et $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ soit faux.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$.
On a $\lim(u_n - v_n) = \lim\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 0$ et $\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim n = +\infty$.

Contre-exemple 6 :

Deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ soit vrai et $\lim(u_n - v_n) = 0$ soit faux.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^2$.
On a $\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{n^2+n}{n^2} = 1$ et $\lim(u_n - v_n) = \lim n = +\infty$.

Contre-exemple 7 :

Deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim u_n = \lim v_n$ soit vrai et $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$ soit faux.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + n$ et $v_n = n$.
On a $\lim u_n = \lim v_n = +\infty$ et $\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{n^2+n}{n} = \lim(n+1) = +\infty$.

Contre-exemple 8 :

Deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ soit vrai et $\lim u_n = \lim v_n$ soit faux.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n n + \frac{1}{n}$ et $v_n = (-1)^n n$.
On a $\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{(-1)^n n + \frac{1}{n}}{(-1)^n n} = \lim\left(1 + \frac{1}{(-1)^n n^2}\right) = 1$ et ni (u_n) ni (v_n) n'admet de limite.

Contre-exemple 9 :

Soit $x > 0$, une suite (u_n) telle que $\lim u_n = 1$ soit vrai et $\lim (u_n)^n = x$ soit vrai.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \frac{\ln(x)}{n}$.
On a $\lim u_n = 1$ et $\lim(u_n)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{\ln(x)}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{\ln(x)}{n}\right)}$.

Or, $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{n} = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{\ln(x)}{n}\right)}{\frac{\ln(x)}{n}} = 1$, ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{\ln(x)}{n}\right) = \ln(x)$.
Donc : $\lim(u_n)^n = e^{\ln(x)} = x$.

Contre-exemple 10 :

Une suite (u_n) telle que $\lim u_n = 1$ soit vrai et $\lim(u_n)^n = 0$ soit vrai.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$.
On a $\lim u_n = 1$ et $\lim(u_n)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$.

Or, $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$, ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\ln\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = -1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\infty$ et ainsi : $\lim(u_n)^n = 0$.

Contre-exemple 11 :

Une suite (u_n) telle que $\lim u_n = 1$ soit vrai et $\lim(u_n)^n = +\infty$ soit vrai.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
On a $\lim u_n = 1$ et $\lim(u_n)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$.

Or, $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$, ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$ et ainsi : $\lim(u_n)^n = +\infty$.

Contre-exemple 12 :

Deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim u_n.v_n = 0$ soit vrai et ($\lim u_n = 0$ ou $\lim v_n = 0$) soit faux.

On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ si n impair, $u_n = 0$ si n pair et $v_n = 1$ si n pair, $v_n = 0$ si n impair .
On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n.v_n = 0$ donc $\lim u_n.v_n = 0$ et ni (u_n) ni (v_n) n'admet de limite.

Contre-exemple 13 :

Une suite (u_n) telle que $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$ soit vrai et (u_n) converge soit faux.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln n$.
On a $\lim(u_{n+1} - u_n) = \lim \ln(n+1) - \ln(n) = \lim \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim u_n = +\infty$.

Contre-exemple 14 :

Une suite (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $\lim u_n = 0$ soient vrais et (u_n) décroissante à partir d'un certain rang soit faux.

On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ si n pair, $u_n = \frac{1}{n^2}$ si n impair .
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $\lim u_{2n} = \lim \frac{1}{2n} = 0$, $\lim u_{2n+1} = \lim \frac{1}{(2n+1)^2} = 0$ donc $\lim u_n = 0$.
De plus, soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 \geq 2n + 2$, ainsi $\frac{1}{(2n+1)^2} \leq \frac{1}{2n+2}$ donc $u_{2n+1} \leq u_{2n+2}$.
Ainsi (u_n) n'est pas décroissante à partir d'un certain rang.

Contre-exemple 15 :

Une suite (u_n) telle que $\lim u_n = +\infty$ soit vrai et (u_n) croissante à partir d'un certain rang soit faux.

On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ si n pair, $u_n = n^2$ si n impair .
On a $\lim u_{2n} = \lim 2n = +\infty$, $\lim u_{2n+1} = \lim(2n+1)^2 = +\infty$ donc $\lim u_n = +\infty$.
De plus, soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 \geq 2n+2$, ainsi $u_{2n+1} \geq u_{2n+2}$.
Ainsi (u_n) n'est pas croissante à partir d'un certain rang.

Contre-exemple 16 :

Une suite (u_n) telle que (u_n) non majorée soit vrai et $\lim u_n = +\infty$ soit faux.

On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ si n pair, $u_n = 0$ si n impair .
On a $\lim u_{2n} = \lim(2n) = +\infty$ donc (u_n) n'est pas majorée.
De plus (u_n) n'a pas de limite.

Contre-exemple 17 :

Une suite (u_n) telle que $\lim u_n = l$ soit vrai et une fonction f telle que $\lim f(u_n) = f(l)$ soit faux.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ sinon.
On a $\lim u_n = 0$ et $\lim f(u_n) = \lim f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim 1 = 1 \neq f(0)$.