Contre-exemples : fonctions

Contre-exemple 1 :

Une fonction f telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) \geq f(x)$ soit vrai et f croissante soit faux.

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2\pi x) + x$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+1) = \cos(2\pi(x+1)) + x + 1 = \cos(2\pi x) + x + 1 = f(x) + 1 \geq f(x).$$

De plus : $f(0) = 1$ et $f(\frac{1}{2}) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ donc $f(0) > f(\frac{1}{2})$ ainsi f n'est pas croissante.

Contre-exemple 2 :

Une fonction f telle que $\lim\limits_{a} f' = 0$ soit vrai et $\lim\limits_{a} f = c$, avec $c \in \mathbb{R}$, soit faux.

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \ln(x)$ et $a = +\infty$.
On a $\lim\limits_{a} f' = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{a} f = +\infty$.

Contre-exemple 3 :

Une fonction f telle que $\lim\limits_{a} f = c$, avec $c \in \mathbb{R}$, soit vrai et $\lim\limits_{a} f' = 0$ soit faux.

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ et $a = +\infty$.
On a : $\lim_a f = 0$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$f'(x) = \frac{2x^2\cos(x^2) - \sin(x^2)}{x^2} = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}.$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x^2)}{x^2} = 0$ et $x \mapsto \cos(x^2)$ n'a pas de limite en $+\infty$. Donc f' n'a pas de limite en $+\infty$.