Preuve du théorème des bornes atteintes

Théorème de Bolzano-Weierstrass (Hors programme)

Toute suite réelle bornée admet une suite extraite convergente.

Soit (u_n) une suite réelle bornée. Il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

On définit les suites (a_n) et (b_n) par :

$$a_0 = -M, b_0 = M$$

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{si } \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] \text{ contient une infinité de termes de la suite } (u_n), \\ \left(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le segment $S_n = [a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} \subset S_n$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{M}{2^{n-1}}$.
   (d) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
2. On pose $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) = \min(\{m \in \mathbb{N}, \varphi(n) < m \text{ et } u_m \in S_{n+1}\}).$$

   (a) Montrer que φ est bien définie.
   (b) Montrer que φ est strictement croissante.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in S_n$.
3. Conclure.

Théorème 6 : Théorème des bornes atteintes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
Autrement dit, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ avec $a < b$, alors il existe $c, d \in [a, b]$ tel que :

$$\forall x \in [a, b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d),$$

Par définition de la borne supérieure, $\sup f$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

4. Montrer qu'il existe (x_n) suite de $[a, b]$ telle que $\lim f(x_n) = \sup f$.
5. Conclure.

Correction

1. (a)
   - Pour $n = 0$,
     On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-M, M] = S_0$ donc S_0 contient une infinité de termes de la suite (u_n).
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que le segment $S_n = [a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).
     - Si $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).
       Alors $S_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).
     - Sinon, $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ contient un nombre fini de termes de la suite (u_n) et $S_n = [a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n). donc $\left]\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).
       Ainsi $S_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).
   - Donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le segment $S_n = [a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$,
   - Si $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).
     Alors $S_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] \subset [a_n, b_n] = S_n$.
   - Sinon, $S_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] \subset [a_n, b_n] = S_n$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$,

- Si $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).
  Alors $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2}$.
- Sinon, $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{b_n-a_n}{2}$.

Ainsi $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Or $b_0 - a_0 = 2M$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n = \frac{M}{2^{n-1}}.$$

(d)
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = 0$ ou $\frac{b_n-a_n}{2}$ donc $a_{n+1} - a_n \geq 0$.
  Ainsi (a_n) est croissante.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n-b_n}{2}$ ou 0 donc $b_{n+1} - b_n \leq 0$.
  Ainsi (b_n) est décroissante.
- $\lim(b_n - a_n) = \lim \frac{M}{2^{n-1}} = 0$.

Donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, S_{n+1} contient une infinité de termes de la suite (u_n), donc l'ensemble $\{m \in \mathbb{N},\ \varphi(n) < m \text{ et } u_m \in S_{n+1}\}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$. Il admet donc un minimum.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) \in \{m \in \mathbb{N},\ \varphi(n) < m \text{ et } u_m \in S_{n+1}\}$ donc : $\varphi(n) < \varphi(n+1)$.
   Ainsi φ est strictement croissante.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) \in \{m \in \mathbb{N},\ \varphi(n) < m \text{ et } u_m \in S_{n+1}\}$ donc : $u_{\varphi(n+1)} \in S_{n+1}$.
   De plus : $u_{\varphi(0)} = u_0 \in [-M, M] = S_0$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(n)} \in S_n.$$

3.
- Comme $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $(u_{\varphi(n)})$ est extraite de (u_n).
- Comme (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles convergent vers une limite commune l.
- Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(n)} \in S_n$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n.$$

  Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim u_{\varphi(n)} = l.$$

- Donc (u_n) admet une suite extraite convergente.

4.
- Si $\sup f \in \mathbb{R}$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sup f - \frac{1}{n+1} < \sup f$ donc $\sup f - \frac{1}{n+1}$ n'est pas un majorant de f. Ainsi, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que :

$$f(x_n) > \sup f - \frac{1}{n+1}.$$

  Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sup f - \frac{1}{n+1} < f(x_n) \leq \sup f.$$

  Donc, par théorème d'encadrement, $\lim f(x_n) = \sup f$.
- Si $\sup f = +\infty$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : n n'est pas un majorant de f. Ainsi, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que :

$$f(x_n) > n.$$

  Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n < f(x_n).$$

  Donc, par théorème de comparaison, $\lim f(x_n) = +\infty = \sup f$.

5.
- (x_n) est une suite de $[a, b]$ donc est bornée. Ainsi d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, (x_n) admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $d \in [a, b]$.
- Comme $(f(x_{\varphi(n)}))$ est extraite de $f(x_n)$, on a : $\lim f(x_{\varphi(n)}) = \sup f$.
- Comme f est continue sur $[a, b]$, on a : $\lim f(x_{\varphi(n)}) = f(d)$.
- Ainsi :

$$f(d) = \sup f.$$

  Donc $\sup f \in \mathbb{R}$ ainsi f est majorée et sa borne supérieure est atteinte.